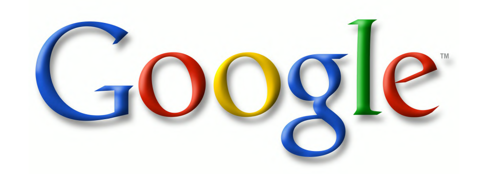
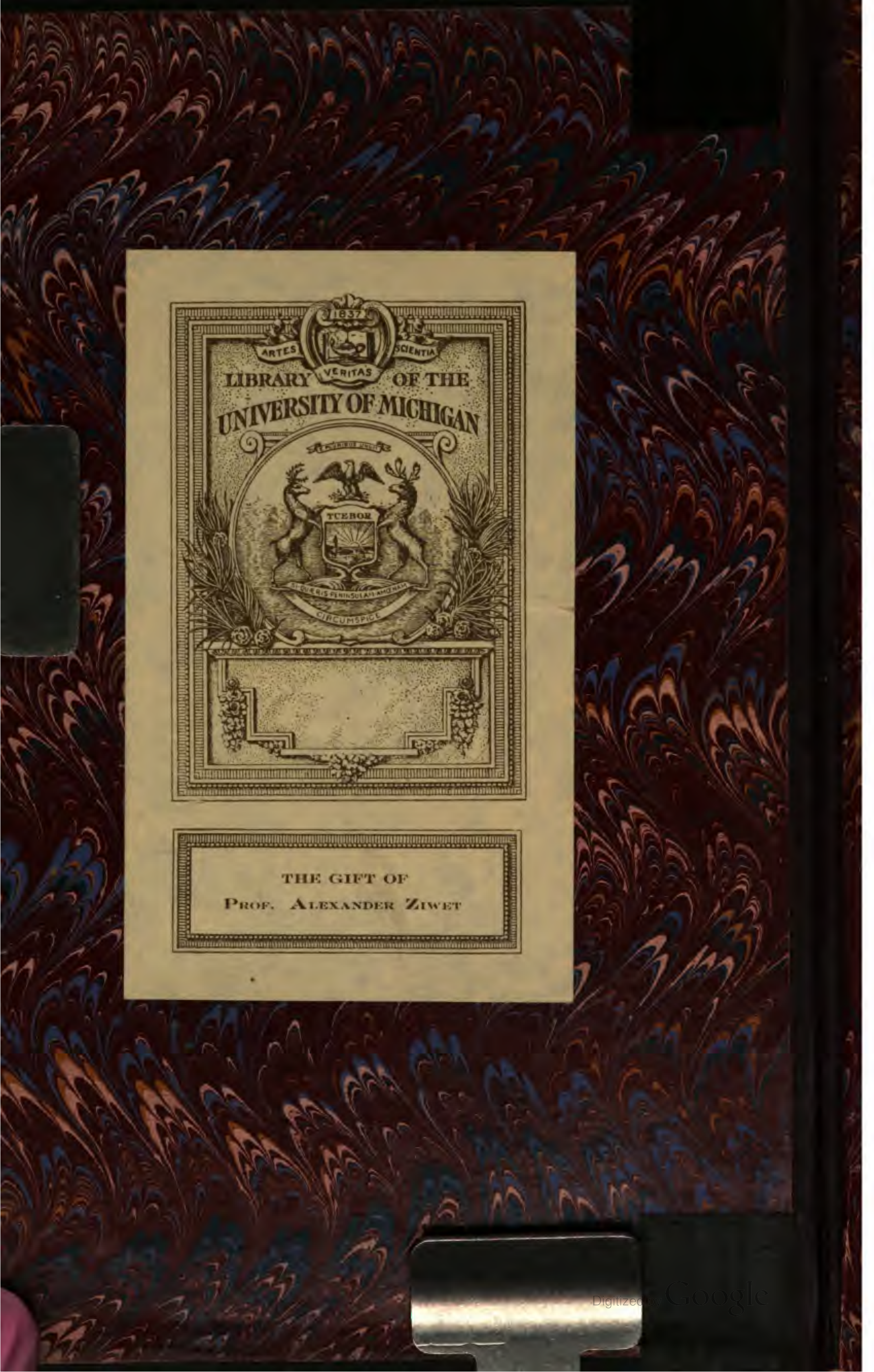
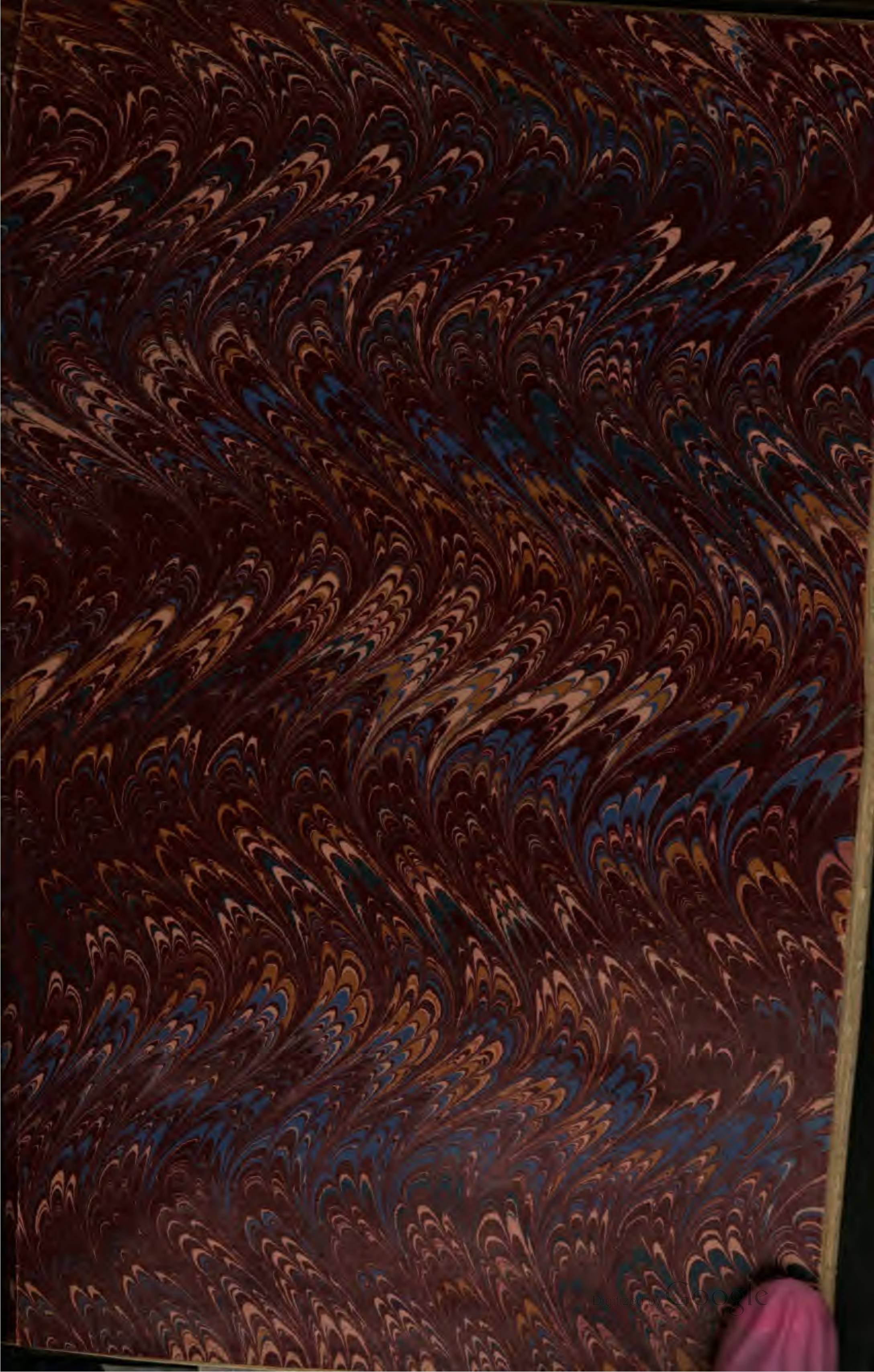
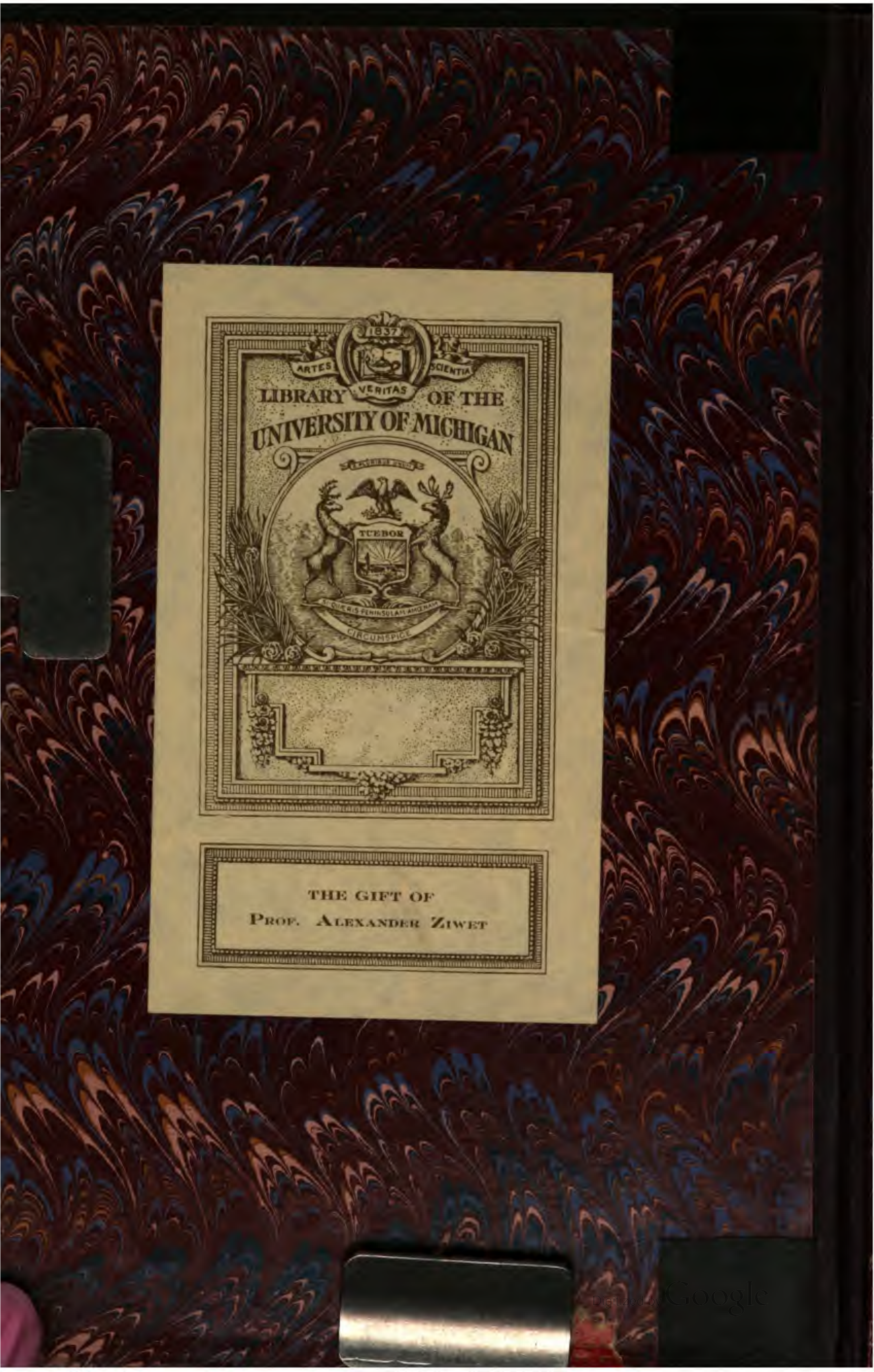
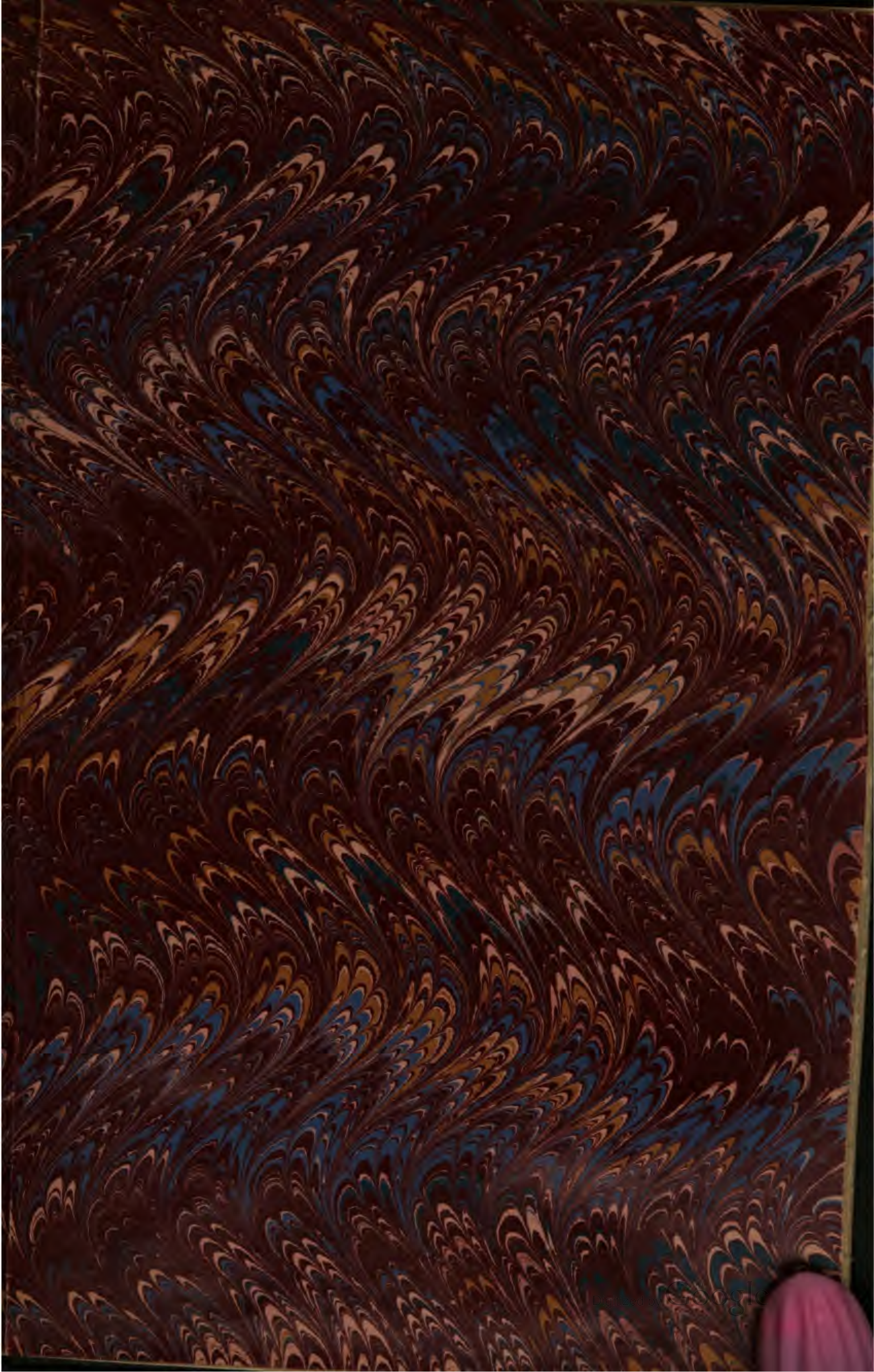




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET




1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



ÜBER DIE

GRUND-OPERATIONEN

AN

ABSOLUTEN UND COMPLEXEN GRÖSSEN

IN

GEOMETRISCHER BEHANDLUNG

ÜBER DIE

GRUND-OPERATIONEN

AN

ABSOLUTEN UND COMPLEXEN GRÖSSEN

IN

GEOMETRISCHER BEHANDLUNG

VON

EDWARD V. HUNTINGTON

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1901

Inhaltsverzeichnis.

1*

Viertes Kapitel.

Potenzierung mit Strecken. Wurzeln. Logarithmen.

Zweiter Teil.

Vektoren der Ebene.

Fünftes Kapitel.

Vektor-Addition.

Sechstes Kapitel.

Vektor-Multiplikation.

Siebentes Kapitel.

Vektor-Potenzierung: Specieller Fall mit der Basis *e*. Trigonometrische Funktionen.

Achtes Kapitel.

Vektor-Potenzierung: Allgemeiner Fall.

Durchgehend benutzte Bezeichnungen.

$E = 1$ die Einheitsstrecke (§ 17, § 34).
h eine (beliebig kleine) vorgegebene absolute Strecke (§ 20).
k; m, n; p, q, r natürliche Zahlen (§ 8).

$a, b, c, \ldots, x, \ldots$ absolute Strecken oder Vektoren (§ 1, § 81).
$A, B, C, \ldots, X, \ldots$ Vektoren der Ebene (§ 79).
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \xi, \ldots$ „reelle" Vektoren (§ 82), oder Winkel (§ 92).

$a_n, b_n, c_n, \ldots$ Folgen von absoluten Strecken (§ 18).

$s, t = 0, \pm E, \pm 2E, \pm 3E, \ldots$ (§ 94).

$A = (a, \alpha)$ oder
${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi)$ } Polarkoordinaten eines eigentlichen Vektors (§ 95).

i der rein imaginäre Vektor $(E, \pi/2)$ (§ 96).

$A = \alpha_1 + \alpha_2 i$ } rechtwinkelige Koordinaten eines Vektors (§ 108).

e ein bestimmter absoluter Vektor ($e \neq E$) (§ 111).
$\equiv$ bedeutet die Kongruenz zweier Winkel (§ 93).

Für die Bedeutung der Symbole $=$, $<$, $>$ siehe § 2, § 15, § 34, § 80, § 83.

Vorwort.

Um das Ziel der vorliegenden Abhandlung genau definieren zu können, geben wir zuerst einen kurzen Überblick über die neuen Zahlenarten, die im Laufe der Zeit in die Analysis eingeführt worden sind.

Die natürlichen Zahlen (Zahlen im engeren Sinne).

An der Spitze der Analysis stehen die natürlichen Zahlen, die dadurch entstehen, dafs wir unsere Fähigkeit ausüben, Dinge zu zählen. Was diese Fähigkeit selbst anbetrifft, so ist sie Sache mehr des Psychologen als des Mathematikers. Kurzum, wir zählen, und die natürlichen Zahlen geben an, wie viele Dinge wir gezählt haben. Von je zwei natürlichen Zahlen a, b ist entweder a kleiner als b ($a < b$), a gröfser als b ($a > b$) oder a mit b identisch ($a = b$).

Eine Operation an Zahlen vornehmen, heifst aus gegebenen Zahlen neue Zahlen ableiten durch irgend eine Regel oder Vorschrift. Das Verfahren des Zählens liefert uns sofort die drei sogenannten direkten Operationen der Addition, Multiplikation und Potenzierung, d. h. die Vorschriften, nach denen wir aus zwei gegebenen natürlichen Zahlen a, b (in bestimmter Reihenfolge) eine dritte natürliche Zahl bestimmen können, die wir die Summe a plus b ($a + b$), das Produkt b mal a (ba), bezw. die $b$te Potenz von a (a^b) nennen.

Für die Addition und Multiplikation gelten dann die folgenden Formeln:

1. $a + b > a$ 4. $ab = ba$
2. $a + b = b + a$ 5. $a(bc) = (ab)c$
3. $a + (b + c) = (a + b) + c$ 6. $a(b + c) = ab + ac$

und für die Potenzierung:

7. $(a^b)^c = a^{bc}$ 8. $a^{b+c} = a^b a^c$ 9. $(ab)^c = a^c b^c$,

wie sich aus dem Verfahren des Zählens leicht ergiebt.

Indem wir nun umgekehrt versuchen, aus zwei gegebenen natürlichen Zahlen a, b eine dritte natürliche Zahl x so zu bestimmen, dafs

$x + b = a$ bezw. $bx = a$ wird, so gelangen wir zu den inversen Operationen: der Subtraktion und Division. Zu der Potenzierung giebt es jedoch zwei inverse Operationen — Wurzelausziehung und Logarithmierung —, je nachdem die Basis oder der Exponent die gesuchte Zahl ist. Es ergiebt sich aber sofort, dafs diese vier inversen Operationen nicht immer durchführbar sind, d. h. die gesuchte natürliche Zahl läfst sich nur dann finden, wenn die gegebenen natürlichen Zahlen gewissen Bedingungen unterworfen sind.

Die Aufgabe der allgemeinen Arithmetik (Zahlen im weiteren Sinne).

Wenn irgend eine Menge von Denkobjekten vorliegt, die alle voneinander verschieden sind, so können wir in dieser Menge nach Belieben allerlei Operationen definieren, d. h. beliebige Vorschriften herstellen, nach welchen wir aus gegebenen Elementen der Menge andere Elemente ableiten können.

Nun wird in der Allgemeinen Arithmetik der Versuch gemacht, eine Menge herzustellen mit den folgenden Eigenschaften:

1. Man stellt eine Regel auf, durch welche man entscheiden kann, ob von zwei gegebenen Elementen a und b a weniger wert („kleiner") als b ($a < b$), a mehr wert („gröfser") als b ($a > b$) oder a gleichwertig mit b ($a = b$) sein soll;

2. es werden drei Operationen so definiert, dafs die Gesetze, die für diese Operationen gelten, formal sich als dieselben ergeben, die für die Addition, Multiplikation und Potenzierung der natürlichen Zahlen gelten;

3. die vier entsprechenden inversen Operationen sind in der Menge stets durchführbar.

Es ist bekanntlich nicht gelungen, eine Menge herzustellen, die diesen Forderungen vollständig entspricht; jede Menge jedoch, die einigermafsen diese Bedingungen befriedigt, nennt man ein Zahlensystem; die Elemente der Menge heifsen dann Zahlen im weiteren Sinne, und für die in der Menge künstlich definierten Operationen wird die Benennung und Bezeichnung nach Analogie mit den Operationen in dem System der natürlichen Zahlen gewählt.

Alle diese neuen Zahlen sind blofs Erfindungen des mathematischen Geistes, und ihre Eigenschaften sind nur deshalb so und so, weil wir vorher darüber Bestimmungen getroffen haben.

Die künstlichen Zahlensysteme, die hier von Interesse sind, sind die rationalen Zahlen, die reellen Zahlen, die imaginären oder Gaufs-

schen komplexen Zahlen. Jedes dieser Systeme bleibt in der einen oder anderen Hinsicht hinter dem Ideal zurück; welches von den Systemen dem Ideal am nächsten kommt, hängt von den Forderungen ab, die für den gerade vorliegenden Zweck als die wichtigsten betrachtet werden.

Die rationalen Zahlen.

Um zunächst das System der positiven rationalen Zahlen zu bilden, fassen wir je zwei natürliche Zahlen in Paare zusammen; jedes Paar besteht aus einer ersten Zahl m und einer zweiten Zahl n (die auch einander gleich sein können) und wird durch das Symbol m/n bezeichnet.

Diese Paare bilden dann eine Menge M und werden, nachdem man die sofort zu erwähnenden Bestimmungen getroffen hat, die positiven rationalen Zahlen genannt.

Ein Paar der Form $m/1$ wird zur Abkürzung mit m bezeichnet; oder besser, wir nehmen die natürlichen Zahlen von vornherein als Elemente der Menge auf — unter dem Namen positive ganze Zahlen — und setzen dann fest, dafs die Elemente $m/1$ und m als gleichwertig anzusehen sind, was auf dasselbe hinauskommt. Eine rationale Zahl, die keiner ganzen Zahl gleichwertig ist, heifst gebrochen.

In dieser Menge M setzen wir nun, wenn $a = m/n$, $b = m'/n'$ zwei beliebige Elemente der Menge sind, folgendes fest:

Wir wollen sagen: a ist weniger wert als b $(a < b)$, a ist mehr wert als b $(a > b)$, oder a ist vom gleichen Wert wie b $(a = b)$, je nachdem $mn' \lesseqgtr m'n$ ist.

Als die Summe a plus b $(a + b)$ bezw. das Produkt b mal a (ba) bezeichnen wir dasjenige Element, das durch die folgenden Regeln bestimmt wird:

$$a + b = \frac{mn' + m'n}{nn'}, \qquad ba = \frac{mm'}{nn'}.$$

Aus dieser Definition der Addition und Multiplikation in der Menge M ist leicht zu zeigen, dafs die Formeln 1 bis 6 gelten, wenn a, b, c beliebige positive rationale Zahlen sind, und dafs die Division in dieser Menge stets durchführbar ist. Dagegen wird die Subtraktion nicht immer durchführbar sein.

Nun nehmen wir ein zweites solches System ^-M und bezeichnen zum Unterschiede ein beliebiges Element der zweiten Menge durch $^-(m/n)$.

In der Menge ^-M machen wir, wenn $^-a = {}^-(m/n)$ und $^-b = {}^-(m'/n')$ zwei beliebige Elemente der Menge darstellen, folgende Übereinkunft:

Wir wollen sagen: $^{-}a \lesseqqgtr {}^{-}b$, je nachdem (umgekehrt) $mn' \gtreqqless m'n$ ist; und wir definieren:

$$(^{-}a) + (^{-}b) = {}^{-}\left(\frac{mn' + m'n}{nn'}\right), \qquad (^{-}b) \, . \, (^{-}a) = \frac{mm'}{nn'}.$$

Die Menge ^{-}M mit diesen Bestimmungen nennen wir das System der **negativen rationalen Zahlen**. Die Formeln 2 und 6 gelten auch in diesem System, die Formel 1 aber nicht mehr.

Endlich bilden wir eine dritte Menge R, welche jedes Element von M und ^{-}M und das specielle Zeichen 0 enthält.

Wenn zwei Elemente x, y der Menge R beide positiv oder beide negativ sind, sollen die eben gegebenen Definitionen noch gelten.

Wenn das eine positiv und das andere negativ ist, so setzen wir fest:

$$\begin{aligned} a + (^{-}b) = (^{-}b) + a &= \frac{mn' - m'n}{nn'} && \text{falls} \quad mn' > m'n \\ &= {}^{-}\left(\frac{m'n - mn'}{nn'}\right) && \text{falls} \quad mn' < m'n \\ &= 0 && \text{falls} \quad mn' = m'n \end{aligned}$$

$$(b)\,(^{-}a) = (^{-}a)\,(b) = {}^{-}\left(\frac{mm'}{nn'}\right).$$

Übrigens setzen wir:

$$^{-}a < 0 < b, \quad x + 0 = 0 + x = x, \quad x \, . \, 0 = 0 \, . \, x = 0.$$

Diese Menge R nennen wir das **System der relativen rationalen Zahlen**, oder schlechthin der **rationalen Zahlen**. In diesem System gelten die Formeln 2 bis 6; die Subtraktion sowie die Division sind in der Menge stets durchführbar, mit Ausnahme der Division durch 0.

In dem System der **rationalen Zahlen** haben wir also eine Menge konstruiert, welche unsere Bedingungen fast ganz erfüllt, soweit nur die Operationen der Addition und Multiplikation und die inversen Operationen der Subtraktion und Division in Betracht kommen.

Die **Potenzierung** mit natürlichen Zahlen als Exponent wird definiert durch die Formel

$$a^m = a \, . \, a \, . \, a \ldots a \ (m \text{ Faktoren}).$$

Wird aber umgekehrt eine rationale Zahl x gesucht, derart, dafs $x^m = a$ ist, so ist schon diese inverse Operation nicht mehr stets durchführbar.

Die Cantorschen reellen Zahlen.

Es möge irgend eine Vorschrift gegeben sein, durch welche man eine unbegrenzte Folge von rationalen Zahlen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ von der

folgenden Eigenschaft bestimmen kann: sobald eine positive rationale Zahl ε beliebig angenommen ist, können wir stets eine Stelle k der Folge so bestimmen, dafs $(a_n - a_k) < \varepsilon$ für $n > k$ ist.

Alle möglichen Folgen dieser Art, oder vielmehr die Gesetze, durch welche die Folgen gekennzeichnet sind, bilden eine Menge A von Objekten, welche Cantor und Weierstrass zu einem Zahlensystem gemacht haben — das System der Cantorschen reellen Zahlen.

Eine Folge $(a, a, \ldots)$, deren Glieder alle gleich einer einzigen rationalen Zahl a sind, bezeichnen wir zur Abkürzung mit a; oder besser, wir nehmen die rationalen Zahlen — und damit auch die natürlichen — von vornherein als Elemente der Menge A auf und setzen dann fest, dafs die Elemente $(a, a, a, \ldots)$ und a als gleichwertig anzusehen sind, was auf dasselbe hinauskommt. Eine reelle Zahl, die mit keiner rationalen Zahl gleichwertig ist, heifst irrational.

Die Bestimmungen, durch welche die Menge A zum Zahlensystem gemacht wird, sind folgende.

Seien $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$ und $\beta = (b_1, b_2, \ldots)$ zwei beliebige Elemente der Menge, so definieren wir:

$\alpha < \beta$ bezw. $\alpha > \beta$, wenn eine positive rationale Zahl c sich finden läfst, derart, dafs $b_n - a_n > c$ bezw. $a_n - b_n > c$ von einer gewissen Stelle ab bleibt; und

$\alpha = \beta$, wenn $(a_n - b_n)$ schliefslich beliebig klein bleibt.

Sind α und β beliebig gegeben, so kann man zeigen, dafs einer und nur einer der drei Fälle: $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ stets eintreten wird.

Eine reelle Zahl α heifst positiv oder negativ, je nachdem $\alpha > 0$ oder $\alpha < 0$ ist.

Die Summe $\alpha + \beta$ und das Produkt $\beta\alpha$ zweier reellen Zahlen werden so definiert:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, \quad a_2 + b_2, \quad a_3 + b_3, \ldots)$$
$$\beta \,.\, \alpha = (b_1 \,.\, a_1, \quad b_2 \,.\, a_2, \quad b_3 \,.\, a_3 \ldots),$$

wobei der Beweis geliefert werden mufs, dafs die hier benutzten Folgen auch thatsächlich zur Menge A gehören.

Zu jeder reellen Zahl α aufser 0 giebt es eine reciproke reelle Zahl β, so dafs $\beta \,.\, \alpha = 1$ ist.

Die Potenzierung, wenn der Exponent eine natürliche Zahl ist, definieren wir durch die Formel:

$$\alpha^m = \alpha \,.\, \alpha \ldots \alpha \text{ (} m \text{ Faktoren).}$$

Wenn die Basis $\alpha = (a_1, a_2, \ldots)$ und der Exponent

$$\beta = \left(\frac{p_1}{q_1}, \quad \frac{p_2}{q_2}, \ldots\right),$$

beide positive reelle Zahlen sind[1]), so bestimmen wir zunächst eine Folge von natürlichen Zahlen $x_1, x_2, \ldots$ durch die Relationen

$$x_n^{q_n} \leqq 10^{n q_n} a_n < (x_n + 1)^{q_n};$$

dann definieren wir:

$$\alpha^\beta = \left(\frac{x_1^{p_1}}{10^{p_1}}, \quad \frac{x_2^{p_2}}{100^{p_2}}, \quad \frac{x_3^{p_3}}{1000^{p_3}}, \ldots\right),$$

wobei gezeigt werden mufs, dafs diese Folge zur Menge A gehört.

Wenn endlich der Exponent β negativ oder 0 ist, während α positiv bleibt, so definieren wir:

$$\alpha^\beta = \text{dem Reciproken von } \alpha^{|\beta|}, \quad \alpha^0 = 1.$$

Es wird also α^β stets positiv sein, wenn α positiv ist.

In diesem Systeme der reellen Zahlen hat man also eine Menge, in welcher die Formeln 2 bis 6 für die Addition und Multiplikation gelten; Subtraktion und Division sind immer durchführbar, mit Ausnahme der Division durch 0. Die Potenzierung ist für positive Basen vollständig definiert und die Wurzelausziehung ist wenigstens im Gebiete der positiven Zahlen stets durchführbar; ebenso läfst sich der Logarithmus ${}^\beta log\ \alpha$ einer positiven Zahl α stets finden, wenn die Basis β des Logarithmensystems positiv und von 1 verschieden ist. Wenn aber die Basis negativ ist, ist schon die Wurzelausziehung mit natürlichen Zahlen als Exponent nicht stets durchführbar; sogar die Potenzierung selbst ist für negative Basen nicht vollständig definiert.

Wir erwähnen hier noch die trigonometrischen Funktionen einer reellen Zahl. Es sei $\alpha = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ eine beliebige reelle Zahl; dann sind

$$\left(a_1,\ a_3 - \frac{a_3^3}{3!},\quad a_5 - \frac{a_5^3}{3!} + \frac{a_5^5}{5!}, \ldots\right)$$

und

$$\left(1,\ 1 - \frac{a_2^2}{2!},\quad 1 - \frac{a_4^2}{2!} + \frac{a_4^4}{4!}, \ldots\right)$$

auch reelle Zahlen, die wir *Sinus* resp. *Cosinus* von α nennen, und mit *sin* α resp. *cos* α bezeichnen.

Man kann zeigen, dafs $sin\ (\alpha \pm 2\, t\, \pi) = sin\ \alpha$ und $cos\ (\alpha \pm 2\, t\, \pi) = cos\ \alpha$ ist, wo t eine ganze Zahl, positiv, negativ oder 0 bedeutet, und dafs $(sin\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$ ist. Ferner kann *sin* α, wenn α richtig gewählt wird, gleichwertig mit einer beliebigen reellen Zahl des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$ gemacht werden; *sin* α fällt aber nie aufserhalb dieses Intervalls. Dasselbe gilt auch von *cos* α.

[1]) Eine Folge $(a_1, a_2, \ldots)$ ändert ihren Wert in dem System A nicht, wenn eine endliche Anzahl Glieder weggelassen wird; daher kann jede positive reelle Zahl durch eine Folge wiedergegeben werden, deren Glieder lauter positive rationale Zahlen sind.

Die Dedekindschen Schnitte.

Einen Schnitt nennen wir irgend eine Regel, nach welcher alle rationalen Zahlen in zwei Klassen geteilt werden, derart, dafs jede Zahl der ersten Klasse weniger wert ist als jede Zahl der zweiten.

Alle denkbaren solchen Regeln oder Einteilungsmethoden bilden dann eine Menge, in welcher Dedekind festgestellt hat, 1. unter welchen Umständen man zwei dieser Begriffe als gleichwertig (bezw. den einen als mehr oder weniger wert als den anderen) ansehen soll, und 2. wie man aus zweien dieser Elemente ein drittes ableiten kann, das man die Summe bezw. das Produkt etc. der beiden ersten nennt. Auf diese Weise ist die Menge der Schnitte zu einem Zahlensystem gemacht, und zwar zu einem System, welches dem System der Cantorschen reellen Zahlen in der Weise entspricht, dafs jedem Schnitte eine reelle Zahl und jeder reellen Zahl ein Schnitt zugeordnet werden kann [1]), während entsprechende Operationen in den beiden Systemen an entsprechenden Elementen angewendet, wieder zu entsprechenden Elementen führen.

Man kann also sagen, das Rechnen mit den Schnitten läuft dem Rechnen mit den Cantorschen reellen Zahlen parallel, und die Schnitte werden geradezu die Dedekindschen reellen Zahlen genannt.

Die Gaussschen komplexen Zahlen.

Um das komplexe Zahlensystem zu bilden, fassen wir je zwei reelle Zahlen in Paare zusammen; jedes Paar besteht aus einer ersten Zahl α_1 und einer zweiten Zahl α_2 (die auch einander gleich sein können) und wird durch das Symbol $[\alpha_1, \alpha_2]$ bezeichnet [2]).

Diese Paare bilden dann das System $\mathfrak{S}$ der komplexen Zahlen.

Ein Paar von der Form $[\alpha, 0]$ wird zur Abkürzung mit α bezeichnet; oder besser, wir nehmen die reellen Zahlen von vornherein als Elemente der Menge $\mathfrak{S}$ auf und setzen dann fest, dafs die Elemente $[\alpha, 0]$ und α als gleichwertig anzusehen sind. Eine komplexe Zahl, die mit keiner reellen Zahl gleichwertig ist, heifst imaginär; eine imaginäre Zahl von der Form $[0, \alpha]$ heifst rein imaginär.

Für die Vergleichbarkeit zweier komplexen Zahlen, wenn beide reell sind, sollen die alten Regeln für reelle Zahlen gelten; wenn dagegen eine der beiden Zahlen imaginär ist, machen wir keine Bestimmungen.

---

[1]) Dabei wird die Gesamtheit aller Schnitte (und ebenso aller Zahlen), die miteinander gleich sind, als ein Element behandelt.

[2]) Die eckigen Klammern erinnern an rechtwinklige Koordinaten.

Seien $A = [\alpha_1, \alpha_2]$ und $B = [\beta_1, \beta_2]$ zwei beliebige komplexe Zahlen, so verstehen wir unter der Summe bezw. dem Produkt von A und B die komplexen Zahlen, die nach den folgenden Regeln bestimmt sind:

$$A + B = [\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2], \quad B \cdot A = [\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2, \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2].$$

Setzen wir nun zur Abkürzung $[0, 1] = i$, so finden wir:

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = [\alpha_1, 0] + [0, 1] \cdot [\alpha_2, 0] = [\alpha_1, 0] + [0, \alpha_2] = [\alpha_1, \alpha_2].$$

Die positive reelle Zahl $a = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ heifst der absolute Betrag der komplexen Zahl A, wenn $A \neq 0$ ist; und wir können stets eine reelle Zahl α so bestimmen, dafs

$$A = \alpha_1 + i\alpha_2 = a\{sin\,(\alpha + 2t\pi) + i\,cos\,(\alpha + 2t\pi)\} \quad (A \neq 0)$$

ist.

Unter der Bten Potenz von A, wo A und B beliebige komplexe Zahlen sind (aber $A \neq 0$), verstehen wir dann die komplexe Zahl, die nach folgender Regel zu bilden ist:

$$A^B = A^{\beta_1 + i\beta_2} = e^{\beta_1 \log a - \beta_2 (\alpha + 2t\pi)} \{sin\,[\beta_2 \log a + \beta_1 (\alpha + 2t\pi)] + i\,cos\,[\beta_2 \log a + \beta_1 (\alpha + 2t\pi)]\},$$

worin e die positive reelle Zahl

$$\left(1 + \frac{1}{1!},\ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!},\ 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}, \ldots\right)$$

bedeutet.

Setzt man aber in diesen Ausdruck verschiedene Werte für t ein, so bekommt man im allgemeinen verschiedene Werte für A^B; wir sagen also, die Potenzierung in dem System der komplexen Zahlen ist (im allgemeinen) eine unendlich vieldeutige Operation.

In dem System der komplexen Zahlen haben wir also eine Menge, in welcher die Formeln 2 bis 6 für Addition und Multiplikation gelten und die Subtraktion und Division (mit Ausnahme der Division durch 0) stets durchführbar sind. Die Formeln 7 bis 9 für die Potenzierung gelten nur dann, wenn die verschiedenen Werte der Potenzen voneinander getrennt gehalten werden, da ja die Potenzierung im allgemeinen eine mehrdeutige Operation ist; dabei darf die Basis im allgemeinen nicht 0 sein. Die Wurzelausziehung und ebenso die Logarithmierung sind stets durchführbar, abgesehen von einer kleinen Anzahl von Ausnahmefällen, sind aber auch im allgemeinen unendlich vieldeutig. Die Forderung der Vergleichbarkeit wird von den Elementen dieser Menge im allgemeinen gar nicht erfüllt.

Dieser kurze Überblick über die wichtigsten Arten von Zahlen im weiteren Sinne mag dazu dienen, zu zeigen, wie verschiedenartig die Begriffe sind, welche die Elemente einer Menge bilden, die durch geeignete Bestimmungen zu einem Zahlensystem gemacht werden kann.

Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes.

Eine Menge von Objekten ganz anderer Art bilden die Punkte einer Ebene. Nichts hindert uns, auch in dieser Menge allerlei Operationen zu definieren, d. h. beliebige Vorschriften herzustellen, nach welchen wir aus gegebenen Punkten andere Punkte ableiten können; man kann sogar diese Operationen in bekannter Weise so definieren, dafs die Punktmenge zu einem Zahlensysteme in dem oben erklärten Sinne wird.

Gerade diese Operationen, wodurch die Punktmenge zu einem Zahlensysteme wird, auseinanderzusetzen und die Grundsätze derselben zu entwickeln, ist die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes.

Es ist bekanntlich möglich, durch gewisse einfache Übereinkünfte jedem Punkte der Ebene eine komplexe Zahl zuzuordnen und jeder komplexen Zahl einen Punkt der Ebene, während auch die entsprechenden Operationen in den beiden Systemen an entsprechenden Elementen angewendet zu entsprechenden Elementen führen. Man sagt also, das Rechnen mit Punkten der Ebene läuft dem Rechnen mit komplexen Zahlen parallel; dabei entsprechen den reellen Zahlen die Punkte einer Geraden[1]).

---

[1]) Es war schon den Alten bekannt, dafs die ein-eindeutige Zuordnung der Punkte einer Geraden mit den reellen Zahlen nicht möglich ist, wenn wir uns auf die rationalen reellen Zahlen beschränken; man kann zwar jeder rationalen Zahl einen Punkt der Geraden zuweisen, aber nicht umgekehrt jedem Punkte eine rationale Zahl.

Der Vorteil, den die reellen Zahlen vor den rationalen Zahlen haben, liegt im folgenden Satze, der sich aus der Cantorschen oder Dedekindschen Definition ergiebt:

„Bilden wir nach irgend einer Vorschrift zwei unbegrenzte Folgen von reellen Zahlen, derart, dafs jede Zahl der ersten Folge weniger wert ist als jede der zweiten, so giebt es (mindestens) eine reelle Zahl, deren Wert zwischen den beiden Folgen liegt."

Diesem Satze gegenüber steht der folgende über die Punkte einer Geraden, welcher bald als Axiom, bald als Postulat angesehen wird:

„Bestimmen wir auf einer Geraden nach irgend einer Vorschrift zwei unbegrenzte Folgen von Punkten, derart, dafs jeder Punkt der ersten Folge links von jedem der zweiten liegt, so giebt es (mindestens) einen Punkt der Geraden, der zwischen den beiden Folgen liegt."

In diesem Aufsatze werden jedoch die geometrischen Operationen für sich allein behandelt, ohne Rücksicht auf die anderen Zahlensysteme.

Pädagogisch betrachtet ist das Rechnen mit Punkten viel einfacher als das mit reellen und komplexen Zahlen. Denn während die Elemente der Zahlenmengen aus ziemlich abstrakten Begriffen verschiedener Art zusammengesetzt sind, sind die Elemente der Punktmenge dagegen alle nur einer Art, und zwar einer, mit welcher der Schüler durch die Anschauung schon längst vertraut ist[1]).

Plan der Ausführung.

Der vorliegende Aufsatz kann natürlich in diesem schon seit langem durcharbeiteten Gebiete keine neuen Resultate liefern. Die Resultate, welche durch eine lange Reihe mathematischer Werke zerstreut sind, werden hier in einem Zusammenhang abgeleitet, welcher einen Überblick über das ganze Gebiet erlaubt.

Die Behandlung ist rein konstruktiv; weder eine historische noch kritische Diskussion ist angestrebt worden.

Anstatt von Punkten der Ebene sprechen wir immer von Strecken nach Länge und Richtung, was bekanntlich auf dasselbe hinauskommt. Strecken, blofs der Länge nach betrachtet, nennen wir absolute Strecken oder Strecken schlechthin; für Strecken nach Länge und Richtung brauchen wir den Terminus Vektor. Das Wort Gröfse, das in der verschiedenartigsten Bedeutung gebraucht wird — oft auch als Synonym mit Zahl im weiteren Sinne —, haben wir überall vermieden; das Wort Zahl brauchen wir nur in dem engeren Sinne von natürlicher Zahl.

Der erste Teil behandelt die absoluten Strecken, entsprechend den Operationen an positiven reellen Zahlen.

Die Voraussetzungen, auf welchen der erste Teil beruht, werden in § 2 angegeben. Das Axiom oder Postulat der Kontinuität ist wesentlich das von Dedekind gegebene, die hier angenommene Form ist von Veronese. Das Veronesesche Axiom wird freilich erst dann mit dem Dedekindschen äquivalent, wenn wir es zusammenfassen mit dem Axiome von Archimedes. (Vergl. O. Hölder: Die

[1]) Aus diesem Grunde sucht jeder Lehrer die Einführung der verschiedenen Zahlenarten dadurch zu erleichtern, dafs er stets die geometrischen Operationen als Bilder oder Symbole der Zahlenoperationen nebenbei entwickelt. Jedoch wird die Beziehung zwischen den Symbolen und den symbolisierten Gegenständen nicht immer klar gemacht, so dafs der Schüler oft zu der Meinung verleitet wird, die verschiedenen neuen Zahlenarten seien überhaupt nur durch ihre geometrische Darstellung begreifbar.

Axiome der Quantität und die Lehre vom Mafs, Leipziger Berichte, Sitzung vom 7. Januar 1901.)

Mittelst der Grenzmethode, die in Kap. II begründet wird, werden wir von der Addition zur Multiplikation, und von der Multiplikation zur Potenzierung in einer ganz natürlichen Weise geführt.

Der zweite Teil handelt von Vektoren der Ebene, entsprechend den Operationen mit komplexen Zahlen.

Die Definitionen der Addition, Multiplikation und Potenzierung sind hier natürlich voneinander unabhängig, sind aber wohl nicht schwerer zu motivieren als die entsprechenden Definitionen für die Operationen an komplexen Zahlen. Der allgemeinste Fall der Potenzierung wird definiert durch den Gebrauch von Polarkoordinaten ohne trigonometrische Funktionen oder unendliche Reihen. Eulers Gleichungen werden dann benutzt zur Definition der trigonometrischen Funktionen.

Ein Hauptaugenmerk wird auf die Bezeichnungen bei den mehrdeutigen Operationen gerichtet. Ein Verzeichnis der Bezeichnungen überhaupt befindet sich am Schlusse des Inhaltsverzeichnisses.

In dem ganzen Aufsatze habe ich einen freien Gebrauch gemacht von dem erschöpfenden Werke von O. Stolz: Allgemeine Arithmetik, 1885/86.

Für die Fundamentalbegriffe habe ich benutzt: R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, 1872; H. Weber, Algebra, Bd. I, Einleitung. 2. Aufl., 1898; A. Pringsheim, Irrationalzahlen und Grenzbegriff, in der Encykl. der math. Wissenschaften, I. A. 3, 1898; H. Burkhardt, Analytische Funktionen, 1897; und die schon erwähnte Abhandlung Hölders.

Bei Zusammenstellung vom Kap. VIII waren mir von Nutzen: W. E. Byerly's Integral Calculus, Chap. II, 1892, und G. Chrystal's Algebra, Vol. II, 1889.

Eine ausführliche Bibliographie findet man bei Stolz und Pringsheim, und auch bei G. Holzmüller, Theorie der isogonalen Verwandtschaften, 1882.

Erster Teil.

Absolute Strecken.

Erstes Kapitel.

Elementare Operationen.

---

§ 1. Die Aufgabe, die wir uns in diesem Aufsatze vorgelegt haben, ist die strenge Entwickelung der Theorie gewisser Operationen an Strecken.

Unter einer Strecke verstehen wir ein begrenztes Stück einer Geraden, nach Länge und Richtung.

Eine Operation an Strecken vornehmen, heifst aus gegebenen Strecken neue Strecken bilden nach irgend einer Regel oder Vorschrift. Die abgeleiteten Strecken sind dann „Funktionen“ der gegebenen.

Wenn die durch eine gegebene Vorschrift verlangten Strecken sich immer finden lassen, welches auch die gegebenen Strecken sein mögen, so heifst die Operation stets durchführbar.

Eine Operation, die an einigen Strecken angewendet durchführbar ist, kann aber undurchführbar sein, wenn wir versuchen, sie an anderen Strecken anzuwenden.

Im ersten Teile des Aufsatzes kommt nur eine Eigenschaft der Strecken in Betracht, nämlich ihre Länge. Eine Strecke blofs der Länge nach betrachtet, nennen wir eine absolute Strecke, oder schlechthin eine Strecke, was mit einer Entfernung gleichbedeutend ist.

Im zweiten Teile wird auch die Richtung in der Ebene berücksichtigt. Eine Strecke der Länge und Richtung nach

betrachtet — sowie die in § 79 erklärte „Null“ — nennen wir einen Vektor der Ebene.

§ 2. Die folgenden Voraussetzungen über die Länge einer Strecke bilden die Ausgangspunkte für die ganze Theorie des ersten Teiles.

1. *Vergleichbarkeit.*

Je zwei Strecken a, b können verglichen werden, indem wir sie aufeinander gelegt denken; dann mufs einer der folgenden drei Fälle eintreten:

erscheint a als ein Teil von b, so ist a kleiner als b (in Zeichen $a < b$);
schliefst a b ein, so ist a gröfser als b ($a > b$);
decken sich a und b, so sind sie einander gleich ($a = b$).

Ist $a = b$ und $b = c$, so ist $a = c$.

2. *Addition.*

Zwei beliebige Strecken a, b auf einer Geraden hintereinander gelegt ergeben, in einer bestimmten Reihenfolge, eine eindeutig bestimmte Strecke, welche die „Summe a plus b“ ($a + b$) genannt wird. Die gegebenen Strecken a, b heifsen Summanden der Summe. Dabei haben wir:

a) $a + b > a$.

b) Wenn $b = b'$ ist, so ist $a + b = a + b'$.

c) Es ist stets $a + b = b + a$ (Kommutatives Gesetz für Addition).

d) Es ist stets $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Associatives Gesetz für Addition).

3. *Subtraktion.*

Ist $a > b$, so giebt es (mindestens) eine Strecke x so, dafs $x + b = a$ ist. (Dafs es nur ein solches x giebt, wird in § 5 aus 1, 2 bewiesen.)

4. *Teilbarkeit in gleiche Teile.*

Ist a eine beliebige Strecke und n eine beliebige natürliche Zahl, so giebt es (mindestens) eine Strecke x so, dafs $nx = a$ ist. (Dafs es nur ein solches x giebt, wird in § 11 aus 1, 2, 3 bewiesen.)

5. *Postulat von Archimedes.*

Wir können jede Strecke so oft zu sich selbst addieren, dafs die so zusammengesetzte Strecke gröfser wird als eine beliebig vorgegebene Strecke.

6. *Kontinuität.*

Bilden wir nach irgend einem Gesetze zwei unbegrenzte Folgen von Strecken (§ 18), derart, dafs jede Strecke der ersten Folge kleiner ist als jede der zweiten, so giebt es (mindestens) eine feste Strecke, die zwischen den beiden Folgen liegt, d. h. gröfser als jede Strecke der ersten und kleiner als jede der zweiten ist.

Wir werden von diesem Postulate erst in § 25 Gebrauch machen.

---

§ 3. Aus den Voraussetzungen § 2 (1, 2, 3) folgen zunächst zwei Sätze:

Wenn $a > b$ und $b > c$ ist, so ist $a > c$; wir sagen dann, dafs b zwischen a und c liegt ($a > b > c$).

Beweis. Nach § 2 (3) giebt es zwei Strecken x und y, derart, dafs $x + b = a$ und $y + c = b$; es ist also, nach § 2 (2b), $x + (y + c) = a$, oder, nach § 2 (2c und 2d), $c + (x + y) = a$; nach § 2 (2a) ist dann $a > c$.

§ 4. Wenn $b < b'$ ist, so ist $a + b < a + b'$.

Beweis. Nach § 2 (3) giebt es ein x so, dafs $x + b = b'$ ist; es ist also nach § 2 (2b) $a + (x + b) = a + b'$, oder nach § 2 (2c und 2d) $(a + b) + x = a + b'$; nach § 2 (2a) ist dann $a + b' > a + b$.

---

§ 5. Subtraktion.

Ist $a > b$, so giebt es, nach der Voraussetzung § 2 (3), mindestens eine Strecke x, derart, dafs $x + b = a$ ist. Dieses x ist aber eindeutig bestimmt.

Denn, wenn $x + b = a$ und zugleich $x' + b = a$ ist, so ist $x + b = x' + b$; wenn nun $x < x'$ oder $x > x'$ wäre, so stünde diese Gleichung im Widerspruch mit § 4. Es mufs also $x = x'$ sein, nach § 2 (1).

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

Diejenige Strecke, zu welcher man b addieren mufs,

um a zu erhalten, heifst die „Differenz a minus b“, und wird mit $a - b$ bezeichnet. Also $(a - b) + b = a$, wobei $a > b$ sein mufs.

a heifst Minuend, b Subtrahend, die Operation selbst die Subtraktion der Strecke b von a.

Aus der Definition folgt unmittelbar: $(a + b) - b = a$.

Es mufs betont werden, dafs wir hiermit dem Symbole $a - b$ nur dann eine Bedeutung gegeben haben, wenn $a > b$ ist.

§ 6. Die folgenden Sätze über Subtraktion von Strecken können aus den schon gegebenen Sätzen für Addition nachgewiesen werden.

1. $a - b < a$.
2. Wenn $b = b'$ ist, so ist $a - b = a - b'$.
3. Wenn $b < b'$ ist, so ist $a - b > a - b'$.
4. Aus $a - c = b$ folgt $a = b + c$, und aus $a + c = b$ folgt $a = b - c$.
5. $a - (b + c) = a - b - c$ und

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

Diese Formeln gelten natürlich nur dann, wenn die vorkommenden Subtraktionszeichen der Definition nach einen Sinn besitzen.

$a \neq b$ soll bedeuten, dafs a nicht gleich b ist, also $a < b$ oder $a > b$. Ist $a \neq b$, so führen wir für $a - b$ bezw. $b - a$ das Zeichen $|a - b|$ ein.

§ 7. Die Addition und Subtraktion sind die ersten Beispiele zweier „inversen“ Operationen, d. h. zweier Operationen, die an derselben Strecke nach einander vorgenommen sich aufheben.

§ 8. Die nächst einfache Operation, die wir an den Strecken vornehmen können, ist die wiederholte Addition oder Vervielfachung. Um diese Operation genauer zu erklären, haben wir offenbar den Begriff der Zahl nötig, denn wir müssen angeben können, wie viel mal die Strecke als Summand genommen werden soll.

Zahlen. In diesem Aufsatze wird das Wort „Zahl“ durchweg im Sinne von „natürlicher Zahl“, 1, 2, 3, ..., gebraucht, und die in dem Verfahren des Zählens begründeten elementaren Eigenschaften dieser Zahlen werden als bekannt vorausgesetzt. Beliebige Zahlen wollen wir mit k; m, n; p, q, r etc. bezeichnen, während wir a, b, c, x, y, z, und h als Bezeichnung für Strecken beibehalten.

$p = q$, $p < q$, $p > q$ bedeuten: p gleich q, p kleiner als q,

p gröfser als q. $p + q$ ist die Summe, $p - q$ (wo $p > q$) die Differenz, und pq das Produkt von p und q.

Für die Summen haben wir:

$$p + q > p; \quad \text{wenn } q \leqq q' \text{ ist, so ist } p + q \leqq p + q';$$
$$p + q = q + p; \quad p + (q + r) = (p + q) + r.$$

Für die Produkte haben wir:

$$pq = qp; \quad p(qr) = (pq)r; \quad (p + q)r = pr + qr.$$

Die Symbole p^2, p^3, ... bedeuten $p . p$, $p . p . p$, ...; dabei heifst p^q die $q$te Potenz von p.

§ 9. Multiplikation von Strecken mit Zahlen.

Bilden wir die Summe $a + a + a + \cdots + a$ von p Strecken mit der Länge a, so sagen wir, dafs wir an a die Operation der „Multiplikation mit p“ vornehmen. Das Resultat der Operation ist eine Strecke, die wir das „Produkt p mal a“ oder das „$p$fache von a“ nennen, und mit $p . a$ oder pa bezeichnen wollen. Dabei soll $1a = a$ sein.

Die Strecke a heifst „Multiplikand“, die Zahl p „Multiplikator“.

Die Zahl p wird also für unseren Zweck lediglich als ein „Operator“ betrachtet, der die Vervielfachung der Strecke a („Operanden“) bewerkstelligt.

§ 10. Aus § 2 (2) und § 4 finden wir die folgenden Sätze:

1. $pa > a$, wenn $p > 1$ ist.

2. Wenn $a = a'$ ist, so ist $pa = pa'$; und wenn $p = p'$ ist, so ist $pa = p'a$.

3. Wenn $a < a'$ ist, so ist $pa < pa'$.

4. Wenn $p < p'$ ist, so ist $pa < p'a$.

5. Umgekehrt, ist $pa \leqq pa'$, so mufs $a \leqq a'$ sein; und ist $pa \leqq p'a$, so mufs $p \leqq p'$ sein. (Beweis indirekt.)

Aus dem Postulate von Archimedes § 2 (5) haben wir:

6. Sind a und b beliebige gegebene Strecken, so können wir stets die Zahl n so grofs nehmen, dafs $na > b$ wird.

Ferner aus § 2 (2), § 6 und dem Verfahren des Zählens finden wir:

7. $p(a \pm b) = pa \pm pb$.

8. $(p \pm q)a = pa \pm qa$.

9. $q(pa) = pq . a$.

§ 11. Division von Strecken mit Zahlen.

Wir erklären jetzt die inverse Operation der Multiplikation mit Zahlen.

Ist eine Strecke a mit der Zahl p beliebig gegeben, so können wir stets eine und nur eine Strecke x so bestimmen, dafs $px = a$ ist.

Denn es giebt mindestens ein solches x nach der Voraussetzung § 2 (4); dafs es nur ein solches geben kann, folgt aus § 10 (5).

Diejenige Strecke, deren $p$faches gleich a ist, heifst der Quotient a durch p, oder das $p$tel von a, und wird mit $\frac{a}{p}$ oder a/p oder $a:p$ bezeichnet. Also $p(a/p) = a$. Dabei ist $a/1 = a$.

a heifst Dividend, p Divisor, die Operation selbst die Division von a durch p.

§ 12. Aus den in § 10 angeführten Sätzen finden wir durch indirekten Beweis die folgenden:

1. $a/p < a$, wenn $p > 1$ ist.
2. Gleiches mit Gleichem dividiert, ergiebt Gleiches.
3. Eine Vergröfserung des Dividenden vergröfsert auch den Quotienten.
4. Eine Vergröfserung des Divisors aber vermindert den Quotienten.
5. Sind a und b beliebige gegebene Strecken, so können wir immer die Zahl n so grofs nehmen, dass $a/n < b$ wird.

In der That sei die Zahl k so bestimmt [nach § 10 (6)], dafs für jedes n, das gröfser als k ist, $a < nb$ ist. Für $n > k$ mufs dann $a/n < b$ sein. Denn, wäre (bei $n > k$) $a/n \gtreqqless b$, so wäre [nach § 10 (2, 3)] $n\,(a/n) \gtreqqless nb$, also $a \gtreqqless nb$, was der Voraussetzung widerspricht.

Ferner finden wir:

6. $(a \pm b)/p = a/p \pm b/p$.
7. $(a/p)/q = a/pq$.

Endlich:

8. $\frac{(pa)}{q} = p\left(\frac{a}{q}\right)$, denn $q\left[p\left(\frac{a}{q}\right)\right] = p\left[q\left(\frac{a}{q}\right)\right] = pa$.

[§ 10 (9), § 11.]

Nach der letzten dieser Formeln können wir nun die beiden Operationen in eine einzige zusammenfassen, siehe folgenden Paragraph.

§ 13. Multiplikation von Strecken mit Brüchen.

Wenn wir das $p$fache einer Strecke a mit q dividieren [oder das $q$tel von a mit p multiplizieren, was nach § 12 (8) auf dasselbe hinauskommt], so sagen wir, dafs wir a mit p/q multiplizieren. Das Resultat dieser Doppeloperation ist eine Strecke, die wir das Produkt p/q mal a nennen, und mit $\frac{p}{q}a$ bezeichnen wollen. Also $\frac{p}{q}a = \frac{pa}{q} = p\frac{a}{q}$.

Das Symbol p/q, das hier als Operator eintritt, heifst ein „Bruch". Die Zahlen p und q heifsen „Zähler" resp. „Nenner" des Bruches. Ein „reduzierter Bruch" ist einer, dessen Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Teiler (aufser 1) enthalten.

Nach Analogie mit § 9 heifst a Multiplikand und p/q Multiplikator. Wir wollen einen Multiplikator „ganz" oder „gebrochen" nennen, je nachdem er eine Zahl oder ein Bruch ist.

Wir haben: $\frac{p}{1}a = pa$ und $\frac{1}{q}a = \frac{a}{q}$, d. h. Multiplikation und Division mit Zahlen sind specielle Fälle der allgemeineren Operation der Multiplikation mit Brüchen.

§ 14. Aus den in § 10 angeführten Sätzen kann man die folgenden ableiten:

1. $\frac{p}{q}a \gtreqless a$, je nachdem $p \gtreqless q$ ist.

2. Ist $a = a'$, so ist $\frac{p}{q}a = \frac{p}{q}a'$; und ist $pq' = p'q$, so ist $\frac{p}{q}a = \frac{p'}{q'}a$.

3. Wenn $a < a'$ ist, so ist $\frac{p}{q}a < \frac{p}{q}a'$.

4. Wenn $pq' < p'q$ ist, so ist $\frac{p}{q}a < \frac{p'}{q'}a$.

Wir geben ausführlich den Beweis für 4. Nehmen wir an,

dafs der Satz nicht richtig wäre, d. h. dafs $\frac{p}{q}a \gtrless \frac{p'}{q'}a$ wäre, dann wäre

$$qq'\left(\frac{p}{q}a\right) \gtrless qq'\left(\frac{p'}{q'}a\right)$$

[§ 10 (2, 3)]; oder

$$q'\left[q\left(\frac{pa}{q}\right)\right] \gtrless q\left[q'\left(\frac{p'a}{q'}\right)\right]$$

[§ 10 (9), § 13]; oder $q'(pa) \gtrless q(p'a)$ (§ 11); oder $pq' \cdot a \gtrless p'q \cdot a$ [§ 10 (9)]; oder $pq' \gtrless p'q$ [§ 10 (5)], was der Voraussetzung widerspricht. Der Satz mufs also richtig sein. In ähnlicher Weise kann man den Beweis für die anderen Sätze führen.

5. $\frac{p}{q}(a \pm b) = \frac{p}{q}a \pm \frac{p}{q}b.$

6. $\frac{p}{q}a \pm \frac{p'}{q'}a = \frac{pq' \pm p'q}{qq'}a.$

7. $\frac{p'}{q'}\left(\frac{p}{q}a\right) = \frac{pp'}{qq'}a.$

(Zum Beweis für 6. und 7. multipliziert man die beiden Seiten mit qq'.)

§ 15. Symbolische Gleichungen zwischen Brüchen als Operatoren.

Durch § 14 (2, 4) sind wir zur folgenden Definition geführt: Ein Bruch p/q heifst gleich einem anderen p'/q' (p/q kleiner oder gröfser als p'/q'), wenn pq' gleich $p'q$ (pq' kleiner oder gröfser als $p'q$) ist. In Zeichen: $\frac{p}{q} \lesseqgtr \frac{p'}{q'}$, je nachdem $pq' \lesseqgtr p'q$ ist. Ebenso heifst $p/q \lesseqgtr n$, je nachdem $p \lesseqgtr nq$.

Aus dieser Definition folgt sofort:

1. $\frac{n}{1} = n$; 2. $\frac{n}{n} = 1$; 3. $\frac{np}{nq} = \frac{p}{q}$.

Das zwischen zwei Operatoren gestellte Symbol „=“ bedeutet nichts weiteres, als dafs das Resultat der einen Operation gleich dem Resultat der anderen ist, wenn die beiden Operatoren auf gleiche Strecken als Multiplikatoren wirken. Diese symbolischen Gleichungen zwischen Operatoren sind also nicht mit Gleichungen zwischen zwei Strecken zu verwechseln.

Ähnliche Bemerkungen gelten für die Symbole $<$ und $>$, wenn sie zwischen zwei Operatoren stehen.

Ferner, durch § 14 (6, 7) sind wir zu den folgenden Definitionen geführt:

Den Bruch $\frac{pq' \pm p'q}{qq'}$ nennen wir die Summe (Differenz) der beiden Brüche p/q und p'/q', und wir schreiben:

$$4. \quad \frac{p}{q} \pm \frac{p'}{q'} = \frac{pq' \pm p'q}{qq'}.$$

Den Bruch $\frac{pp'}{qq'}$ nennen wir das Produkt der Brüche p/q und p'/q', und wir schreiben: 5. $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$.

Für die Summen und Produkte von Brüchen gelten dieselben Regeln, die wir in § 8 für Zahlen angegeben haben.

§ 16. Division von Strecken durch Brüche.

Der Quotient a durch p/q heifst diejenige Strecke, welche man mit p/q multiplizieren mufs, um a zu erhalten. Die verlangte Strecke wird offenbar $(q/p)a$ sein. Statt mit p/q zu dividieren, können wir also mit q/p multiplizieren.

Aus § 15 (5) finden wir: $\frac{p/q}{p'/q'} = \frac{q'}{p'} \cdot \frac{p}{q} = \frac{pq'}{p'q}$.

---

§ 17. Die Messung von Strecken.

Um eine Strecke zu messen, setzen wir vor allen Dingen eine willkürliche Strecke fest, die wir die Einheitsstrecke nennen, und stets mit E bezeichnen wollen.

Die Messung einer Strecke a besteht nur darin, dafs wir aufsuchen, wie viel mal E oder ein $n$tel von E in a enthalten ist.

Wir betrachten zunächst einen speciellen Fall, und dann den allgemeinen.

1. Wenn a ein Vielfaches von E ist, oder wenn A ein Vielfaches von einem $n$tel von E ist, so heifst a mit E kommensurabel.

In diesem Falle können wir dann eine Zahl p so bestimmen, dafs entweder $a = pE$ oder $a = p(E/n)$ ist, und die Messung ist also genau.

2. In allen Fällen können wir $E/n < a$ machen, indem wir n grofs genug nehmen [§ 12 (5)]; ferner können wir bei festem n $m(E/n) > a$ machen, indem wir m grofs genug nehmen [§ 10 (6)].

Zu jedem n (mit dem n beginnend, für welches E/n schon kleiner als a ist) können wir also eine Zahl p so bestimmen, dafs

$$p(E/n) \leqq a < (p+1)(E/n)$$

ist; d. h. entweder $a = p(E/n)$ oder $a = p(E/n) +$ einem Fehler, der kleiner ist als E/n.

Wenn a mit E nicht kommensurabel ist, ist also die Messung nie genau; ein beliebiger Grad der Annäherung kann aber erreicht werden, indem wir n grofs genug (und dadurch E/n klein genug) wählen.

Wenn wir uns auf kommensurabele Strecken beschränken, können wir durch die schon vorhandenen Hülfsmittel weitere Operationen auf Strecken erklären und die Grundsätze ihrer Theorie ohne Schwierigkeit entwickeln.

Wir werden aber dieser Theorie keinen besonderen Platz einräumen, da die kommensurabelen Strecken stets als specielle Fälle der allgemeinen Strecken erscheinen werden.

Um die weiteren Operationen für den allgemeinen Fall erklären zu können, müssen wir eine neue Beziehung zwischen Strecken untersuchen — den Begriff des Grenzwertes einer Folge von Strecken kennen lernen.

Zweites Kapitel.

Theorie der Grenzen.

§ 18. Streckenfolgen.

Die Theorie der Grenzen setzt den Begriff einer unbegrenzt fortsetzbaren Folge von Strecken voraus.

Um diesen Begriff klar zu machen, denken wir uns zunächst die unbegrenzte Reihenfolge der Zahlen 1, 2, 3, ... Schaffen wir nun irgend ein Gesetz, nach welchem jeder Zahl n eine bestimmte Strecke a_n zugeordnet ist, so bestimmen wir eben dadurch eine unbegrenzte Folge von Strecken, $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Die Eigenschaften der Folge hängen von dem Gesetze ab, nach dem sie gebaut wird.

Die einzelnen Strecken, aus denen eine Folge besteht, heifsen ihre Elemente. Die laufende Nummer eines Elementes — welche die Stelle des Elementes in der Folge angiebt — wird durch eine kleine Zahl rechts unten bezeichnet. Es giebt kein letztes Element, denn es giebt keine gröfste Zahl. Wenn wir von „der Folge a_n“ oder „der Folge a“ sprechen, meinen wir diejenige Folge, deren $n$tes Element a_n ist.

Das Gesetz, welches eine Streckenfolge kennzeichnet, läfst sich am bequemsten in einer der beiden folgenden Weisen ausdrücken [1].

Erstens kann man jedes Element unmittelbar aus der Nummer seiner Stelle bestimmen (indem man z. B. festsetzt, dafs $a_n = n^2 E$ sein soll).

Oder zweitens kann man jedes Element mittelbar durch ein rekurrierendes Verfahren aus dem vorhergehenden ableiten (indem man z. B. festsetzt, dafs $a_1 = E$ und $a_n = 2\,a_{n-1}$ sein soll).

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dafs nach dem Gesetze einige Elemente, oder sogar alle, einander gleich ausfallen können. Jedenfalls sind nicht die einzelnen Elemente der Folge, sondern das Gesetz ins Auge zu fassen.

§ 19. Ein Beispiel zweier solcher Streckenfolgen liefert uns das Verfahren der Messung (§ 17). Wir fanden nämlich zu jeder Zahl n [2]) einen Bruch p/n derart, dafs $\frac{p}{n} E \leqq a < \frac{p+1}{n} E$ war. Dieses Verfahren giebt uns also ein Gesetz, nach dem zu jeder Zahl n [2]) eine Strecke $p(E/n)$ und auch eine Strecke $(p+1)(E/n)$ zugeordnet ist; es bilden also die Strecken $p(E/n)$ und ebenso die Strecken $(p+1)(E/n)$ eine unbegrenzte Folge.

Unter den Streckenfolgen sind einige dadurch ausgezeichnet, dafs sie einen „Grenzwert“ haben. Was wir unter Grenzwert verstehen, erklären wir nun in folgender Definition.

§ 20. **Grenzwert einer Streckenfolge.**

Einer unbegrenzten Folge von Strecken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kommt eine feste Strecke a als Grenzwert zu, sobald

---

[1]) Von einer tabellarischen Darstellung, in der man jeder Zahl n gegenüber das entsprechende Element a_n angiebt, kann offenbar die Rede nicht sein; denn die Anzahl der in Frage stehenden Elemente ist unbegrenzt grofs, und wir könnten ein solches Register nie vollständig machen.

[2]) Von einer gewissen Stelle ab.

man zu jeder noch so kleinen vorgegebenen Strecke h eine Stelle k der Folge so bestimmen kann, dafs jedes Element nach dem $k$ten zwischen $a - h$ und $a + h$ liegt[1]). In Zeichen: $a = \lim a_n$.

Wir wollen hierfür den folgenden abgekürzten Ausdruck benutzen:

Eine Strecke a heifst der Grenzwert einer Folge a_n, wenn die Elemente a_n schliefslich beliebig nahe an a bleiben.

Diese Definition giebt uns sofort das Mittel, womit wir die Frage beantworten können, ob eine gegebene Streckenfolge eine gegebene Strecke zum Grenzwert hat. [Die weit schwierigere Frage, ob eine gegebene Folge überhaupt einen Grenzwert hat oder nicht, wollen wir erst später (§ 25) behandeln.]

Ob eine Strecke der Grenzwert einer Folge sei oder nicht, können wir allerdings nie dadurch entscheiden, dafs wir versuchsweise zu jedem vorgegebenen h die entsprechende Stelle k aufsuchen. Denn es ist nicht nur die Anzahl der bei jedem h zu untersuchenden Elemente unbegrenzt grofs, sondern man kann auch immer noch neue, kleinere Werte von h vorschreiben, zu denen wir die entsprechenden Stellen bestimmen müfsten. Wir müfsten also diesen Versuch wegen seiner doppelten Unmöglichkeit immer aufgeben.

Wir müssen vielmehr nicht die einzelnen Strecken der Folge, sondern die Eigenschaften des Gesetzes in Betracht ziehen, um eine solche Frage zu untersuchen.

Wir bemerken hier noch Folgendes: Der Grenzwert einer Streckenfolge (falls ein solcher existiert) braucht keineswegs ein Element der Folge zu sein; er ist vielmehr eine Strecke für sich, die mit der Folge in einer bestimmten Weise zwar verbunden ist, aber die Eigenschaften der Elemente der Folge nicht notwendigerweise besitzt.

§ 21. Ein Beispiel eines Grenzwertes liefert uns das Verfahren der Messung (§ 17). Denn wir hatten

$$p\,(E/n) \leqq a < (p + 1)\,(E/n),$$

[1]) Wir bemerken hier ein für allemal, dafs h stets kleiner als a vorausgesetzt ist, so dafs $a - h$ unter allen Umständen Sinn hat.



und die Differenz der äufsersten Glieder ist E/n. Bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir nach § 12 (5) eine Zahl k so bestimmen, dafs für $n > k$ $E/n < h$ bleibt. Für $n > k$ bleibt also

$$a - h < \frac{p}{n} E \leqq a < \frac{p+1}{n} E < a + h;$$

d. h.

$$lim \frac{p}{n} E = a \quad \text{und auch} \quad lim \frac{p+1}{n} E = a.$$

§ 22. Fundamentalsatz der Grenzmethode.

Eine Folge von Strecken kann nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben.

Beweis: Sei $lim\, a_n = a$; man soll beweisen, dafs keine andere Strecke b ($b \neq a$) der Grenzwert von a_n sein kann.

Da $b \neq a$ ist, so ist die Differenz $|a - b|$ eine bestimmte Strecke c.

Bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$

$$a - h < a_n < a + h$$

bleibt. Ist nun $h < c/2$ genommen, so bleibt für $n > k$

$$|a_n - b| > c/2,$$

und a_n kann also nicht beliebig nahe an b gebracht werden. D. h. b kann nicht der Grenzwert von a_n sein.

§ 23. Lehrsatz.

Ist $a_n < b_n$ und $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, so ist auch $a < b$, vorausgesetzt, dafs von einer gewissen Stelle ab $b_n - a_n > c$ bleibt (wo c irgend eine feste Strecke ist).

Beweis.

Bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$ $a - h < a_n < a + h$ und $b - h < b_n < b + h$ bleiben. Von dieser Stelle ab bleibt dann $a < a_n + h$ und $b_n - h < b$.

Ist nun $h < c/2$ genommen, so ist $a_n + h < b_n - h$; folglich mufs $a < b$ sein.

§ 24. Lehrsatz.

Liegt a_n immer zwischen a'_n und a''_n, und ist $lim\, a'_n = a$, $lim\, a''_n = a$, so ist auch $lim\, a_n = a$.

Denn bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir eine Stelle k bestimmen, von der ab a'_n sowie a''_n zwischen $a - h$ und $a + h$ bleibt. Nach dieser Stelle bleibt dann auch a_n zwischen $a - h$ und $a + h$; d. h. $lim\, a_n = a$.

§ 25. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Grenzwertes.

Lehrsatz.

Ist jedes Element einer Folge a_n kleiner als jedes der Folge b_n ($a_p < b_q$), und bleibt die Differenz $b_n - a_n$ der entsprechenden Elemente schliefslich beliebig klein, so existiert ein Grenzwert für die beiden Folgen.

Beweis. Nach dem Postulat der Kontinuität [§ 2 (6)] giebt es eine Strecke c derart, dafs $a_n < c < b_n$ für jedes n ist.

$c - a_n$ und $b_n - c$ sind dann kleiner als $b_n - a_n$, bleiben also schliefslich beliebig klein. Folglich ist $lim\, a_n = c$ und $lim\, b_n = c$.

§ 26. Wir schliefsen dieses Kapitel mit einigen kleineren Sätzen über Grenzwerte und gehen dann sofort zu weiteren Operationen an Strecken über.

Veränderliche.

Veränderlich heifst eine Strecke, welcher wir nach Willkür irgend eine Länge beilegen können; oder besser, eine Veränderliche ist ein Zeichen, mit dem wir eine beliebige Strecke darstellen können.

§ 27. Hülfssätze.

1. Wir können die Summe von einer bestimmten Anzahl veränderlichen Strecken beliebig klein machen, indem wir die einzelnen Summanden klein genug nehmen.

2. Wir können die Differenz zweier veränderlichen Strecken beliebig klein machen, indem wir die beiden Strecken klein genug nehmen.

Denn (1) die Summe von p Strecken wird $< h$ sein, sobald jede Strecke $< h/p$ genommen ist; und (2) wenn $x < h$ und $y < h$ ist, so ist auch $|x - y| < h$ (wobei $x \neq y$).

§ 28. Lehrsatz.

Ist $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, $lim\, c_n = c$, . . ., so ist

$$lim\,(a_n + b_n + c_n + \cdots) = a + b + c + \cdots,$$

wenn die Anzahl der Folgen eine bestimmte ist.

Sei nämlich p die Anzahl der Folgen. Bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$

$$a - h/p < a_n < a + h/p$$
$$b - h/p < b_n < b + h/p$$
$$c - h/p < c_n < c + h/p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bleibt. Von dieser Stelle ab bleibt dann (§ 4.)

$$(a+b+c+\cdots)-h<(a_n+b_n+c_n+\cdots)<(a+b+c+\cdots)+h.$$

Folglich

$$lim\,(a_n + b_n + c_n + \cdots) = a + b + c + \cdots$$

§ **29.** Lehrsatz.

Ist $lim\,a_n = a$, $lim\,b_n = b$ und $a < b$, so ist $a_n < b_n$ von einer bestimmten Stelle ab und $lim\,(b_n - a_n) = b - a$.

Denn bei beliebig kleinem vorgegebenen h können wir eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$ $a - h/2 < a_n < a + h/2$ und $b - h/2 < b_n < b + h/2$ bleibt.

Ist nun $h < b - a$ genommen, so ist $a + h/2 < b - h/2$; es bleibt dann für $n > k$

$a_n < b_n$ und $(b-a) - h < b_n - a_n < (b-a) + h$. [§ 6 (3).]

Damit ist der Satz bewiesen.

Drittes Kapitel.

Multiplikation und Division mit Strecken.

§ **30.** Mittels eines Grenzprozesses wollen wir nun eine Operation an Strecken erklären, in welcher der Operator sowohl wie der Operand eine Strecke ist. Da dieser Operation die Multiplikation mit Brüchen zu Grunde liegt, nennen wir sie die „Multiplikation von Strecken mit Strecken“.

§ **31.** **Die Multiplikation einer Strecke a (Multiplikand) mit einer zweiten Strecke b (Multiplikator) erklären wir in folgender Weise.**

Wir setzen vor allen Dingen eine willkürliche Einheitsstrecke E fest und messen den Operator b durch E. (§ 17.)

1. Im Falle der Kommensurabilität — d. h. wenn ein Bruch q/n sich so bestimmen läfst, dafs $(q/n)E = b$ ist — multiplizieren wir einfach den Operanden a mit diesem Bruche q/n (§ 13); die Strecke $(q/n)a$, die wir so erhalten, nennen wir das „Produkt b mal a“.

2. In allen Fällen können wir eine unbegrenzte Folge von Brüchen q/n bestimmen, nach dem Gesetze:

$$\frac{q}{n}E \leqq b < \frac{q+1}{n}E. \quad (\S\ 19.)$$

Indem wir nun den Operanden a mit den Brüchen dieser Folge der Reihe nach multiplizieren, bilden wir eine Streckenfolge, deren $n$tes Element $(q/n)a$ ist. Den Grenzwert dieser Folge bei wachsendem n, $\lim \frac{q}{n} a$, wollen wir dann das „Produkt b mal a“ nennen und mit $b \,.\, a$ oder ba bezeichnen.

Dafs die Folge $(q/n)a$ thatsächlich einen Grenzwert hat, folgt sofort aus § 25. Denn wir haben 1. $\frac{q}{n}a < \frac{q'+1}{n'}a$ und 2. $\frac{q+1}{n}a - \frac{q}{n}a = \frac{a}{n}$, welches schliefslich beliebig klein bleibt.

Im Falle der Kommensurabilität ist es für das Resultat gleichgültig, ob der Multiplikator ein Bruch oder eine Strecke ist.

§ 32. Sätze über Multiplikation von Strecken.

1. Aus der Definition folgt sofort: $Ea = a$ und $bE = b$.

2. Wenn $a = a'$ ist, so ist $ba = ba'$; und wenn $b = b'$ ist, so ist $ba = b'a$ (§ 22).

3. Wenn $a < a'$ ist, so ist $ba < ba'$; d. h. eine Vergröfserung des Multiplikanden vergröfsert auch das Produkt.

Denn wir haben $(q/n)a < (q/n)a'$ [§ 14 (3)], und die Differenz $(q/n)a' - (q/n)a = (q/n)(a' - a)$ bleibt gröfser als eine feste Strecke (weil diese Folge, ebenso wie $(q/n)a$, einen festen Grenzwert hat, was unmöglich wäre, wenn man ihre Elemente beliebig klein machen könnte).

Also nach § 23 $\lim (q/n)a < \lim (q/n)a'$ oder $ba < ba'$.

4. Wenn $b < b'$ ist, so ist $ba < b'a$; d. h. eine Vergröfserung des Multiplikators vergröfsert auch das Produkt.

Denn bestimmen wir eine Zahl k derart, dafs $E/k < (b' - b)/2$ ist, so ist für $n > k$ $\; ba < \frac{q+1}{n} a < \frac{q'}{n} a \leqq b'a$ [§ 14 (4)]. Also $ba < b'a$.

5. Setzen wir nun $b' = E$ bezw. $b = E$, so sehen wir: Die Operation der Multiplikation vergröfsert oder vermindert den Multiplikanden, je nachdem der Multiplikator gröfser oder kleiner als E ist.

§ **33.** Es gelten nun für die Produkte von Strecken die folgenden Rechnungsregeln (die auch für die Produkte von Zahlen gültig sind).

1. Kommutatives Gesetz für Multiplikation:

$$ab = ba.$$

2. Associatives Gesetz für Multiplikation:

$$a(bc) = (ab)c.$$

Beweis: Sei $\frac{p}{n} E \leqq a < \frac{p+1}{n} E$ und $\frac{q}{n} E \leqq b < \frac{q+1}{n} E$. Dann ist

$$\left(\frac{p}{n} E\right) \cdot \left(\frac{q}{n} E\right) c \leqq a \, . \, bc < \left(\frac{p+1}{n} E\right) \cdot \left(\frac{q+1}{n} E\right) c \quad [\S\, 32\ (2\text{–}3)]$$

oder

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} c \leqq a \, . \, bc < \frac{p+1}{n} \cdot \frac{q+1}{n} c \quad [\S\ 31\ (1)].$$

Die Differenz der äufsersten Glieder ist

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{p}{n} c + \frac{q}{n} c\right) + \frac{c}{nn} \leqq \frac{1}{n}(ac + bc) + \frac{c}{nn},$$

was schliefslich beliebig klein bleibt [§ 12 (5), § 27 (1)].

Es ist also

$$a \, . \, bc = lim \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} c \cdot$$

Aber ebenso ist

$$b \, . \, ac = lim \frac{q}{n} \cdot \frac{p}{n} c \quad \text{und} \quad (ab)c = lim \frac{pq}{nn} c.$$

Nach § 15 und § 22 haben wir dann:

a) $a \,.\, bc = b \,.\, ac$ oder, wenn $c = E$ ist, $ab = ba$;
b) $a(bc) = (ab)c$.

Die Strecken a und b heifsen die **Faktoren** des Produktes ab oder ba; jeder Faktor ist der „**Koeffizient**" des anderen.

3. Distributives Gesetz:

$$\boldsymbol{a(b \pm c) = ab \pm ac.}$$

Beweis. Nach § 28 und § 29 haben wir:

$$a(b \pm c) = lim\, \frac{p}{n}(b \pm c) = lim\left(\frac{p}{n}b \pm \frac{p}{n}c\right)$$

$$= lim\, \frac{p}{n}b \pm lim\, \frac{p}{n}c = ab \pm ac.$$

Aus 2. und 3. ergiebt sich:

4. $(a + b)(c \pm d) = ac \pm ad + bc \pm bd$;
$(a - b)(c \pm d) = ac \pm ad - bc \mp bd$.

§ 34. Symbolische Gleichungen zwischen Brüchen (oder Zahlen) und Strecken.

Wenn $a = (p/q)E$ $[a < (p/q)E$ oder $a > (p/q)E]$ ist, so wollen wir die Strecke a gleich dem Bruch p/q (a kleiner als p/q oder a gröfser als p/q) nennen. In Zeichen: $a \lesseqgtr \frac{p}{q}$, je nachdem $a \lesseqgtr \frac{p}{q}E$. Ebenso heifst $a \lesseqgtr p$, je nachdem $a \lesseqgtr pE$. Insbesondere, $E = 1$.

Dabei sind die Bemerkungen in § 15 zu berücksichtigen.

---

§ 35. Hülfssatz.

Bleibt einer von zwei veränderlichen Faktoren kleiner (gröfser) als eine feste Strecke, so können wir ihr Produkt beliebig klein (beliebig grofs) machen, indem wir den anderen Faktor klein genug (grofs genug) nehmen.

Denn seien p und n feste Zahlen, wovon n beliebig grofs ist. Wenn $x < pE$ bleibt, dann wird $xy < E/n$, sobald $y < E/np$ genommen ist. Wenn $x > E/p$ bleibt, dann wird $xy > nE$, sobald $y > npE$ genommen ist.

§ 36. Lehrsatz.

Ist $lim\, a_n = a$, $lim\, b_n = b$, $lim\, c_n = c, \ldots$, so ist

$$lim\,(a_n \,.\, b_n \,.\, c_n \ldots) = a \,.\, b \,.\, c \ldots,$$

wenn die Anzahl der Folgen eine bestimmte ist.

Wir beweisen den Satz zunächst für zwei Folgen: a_n, b_n.

Zu irgend einer Strecke h' ($h' < a$, $h' < b$) können wir eine Stelle k bestimmen, von der ab

$$a - h' < a_n < a + h' \quad \text{und} \quad b - h' < b_n < b + h'$$

bleiben. Für $n > k$ bleibt dann

$$(a - h')(b - h') < a_n \,.\, b_n < (a + h')(b + h') \quad (\S\ 32)$$

oder

$$ab - h'(a + b - h') < a_n \,.\, b_n < ab + h'(a + b + h') \ (\S\ 33).$$

Bei beliebig kleinem vorgegebenem h können wir nun h' so bestimmen, dafs $h'(a + b \pm h') < h$ ist (§ 35).

Wenn wir dann diesen so bestimmten Wert für h' einsetzen, so finden wir zu jedem noch so kleinen h eine Stelle k, von der ab $ab - h < a_n \,.\, b_n < ab + h$ bleibt. D. h. $\lim (a_n \,.\, b_n) = ab$.

Der Satz ist nunmehr leicht für mehrere Folgen zu beweisen. Denn aus $\lim (a_n \,.\, b_n) = ab$ und $\lim c_n = c$ folgt

$$\lim (a_n \,.\, b_n \,.\, c_n) = abc; \text{ u. s. w.}$$

---

§ **37.** Ebenso wie wir neben der Operation der Addition von Strecken eine inverse Operation (die Subtraktion) hatten, so haben wir neben der Multiplikation der Strecken eine inverse Operation, die wir jetzt erklären wollen.

§ **38.** Sind die Strecken a, b beliebig gegeben, so können wir stets nur eine Strecke x so bestimmen, dafs $bx = a$ ist, wie aus folgendem klar wird.

Nach § 35 können wir E/n so klein machen, dafs $(E/n) b < a$ wird, indem wir n grofs genug nehmen, und bei festem n können wir dann $\frac{m}{n} E$ so grofs machen, dafs $\left(\frac{m}{n} E\right) b$ über a hinaus wächst, indem wir m grofs genug nehmen.

Zu jeder Zahl n (von einer gewissen Stelle ab) mufs also eine derartige Zahl p existieren, dafs

$$\left(\frac{p}{n} E\right) b \leqq a < \left(\frac{p+1}{n} E\right) b$$

ist. In dieser Weise bestimmen wir eine unbegrenzte Streckenfolge, deren $n$tes Element $(p/n) E$ ist.

Wir haben nun erstens:

$$\lim \left(\frac{p}{n} E \cdot b\right) = a;$$

und zweitens: hat auch die Folge $(p/n)E$ einen Grenzwert, denn die Bedingungen von § 25 sind ebenso wie in § 31 erfüllt.

Dieser Grenzwert $lim \frac{p}{n} E$ ist dann die verlangte Strecke x; denn es ist

$$b\left(lim \frac{p}{n} E\right) = lim\left(\frac{p}{n} E \cdot b\right) = a. \quad (\S\ 36.)$$

Dafs es nur eine solche Strecke giebt, folgt aus § 32 (3). (Beweis indirekt.)

Somit ist folgende Definition gerechtfertigt:

§ 39. Division von Strecken durch Strecken.

Diejenige Strecke, welche man mit b multiplizieren mufs, um a zu erhalten (§ 38), heifst der Quotient a durch b oder das Verhältnis a zu b, und wird mit $\frac{a}{b}$ oder a/b oder $a : b$ bezeichnet. Also $b(a/b) = a$.

a heifst Dividend, b Divisor, die Operation selbst die Division von a durch b (nach Analogie mit § 11).

Wenn der Divisor mit E kommensurabel ist, ist es für das Resultat gleichgültig, ob der Divisor eine Strecke oder ein Bruch ist.

§ 40. Aus § 32 finden wir folgende Sätze über Division von Strecken.

1. $a/E = a$. $a/a = E$.
2. Gleiches mit Gleichem dividiert ergiebt Gleiches.
3. Eine Vergröfserung des Dividenden vergröfsert auch den Quotienten.
4. Eine Vergröfserung des Divisors aber vermindert den Quotienten.
5. Die Operation der Division vergröfsert oder vermindert den Dividenden, je nachdem der Divisor kleiner oder gröfser als E ist.

§ 41. Reciproke Strecken.

Zwei Strecken, deren Produkt gleich E ist, heifsen reciproke Strecken.

Die Reciproke einer beliebigen Strecke a ist offenbar E/a.

(§ 39.) Die Reciproke von E ist E selbst [§ 40 (1)]. Wenn eine von zwei Reciproken kleiner als E ist, so ist die andere gröſser als E, und eine Vergröſserung der einen vermindert die andere [§ 40 (4)].

Statt durch b zu dividieren, können wir mit E/b multiplizieren. Denn

$$b\left(\frac{E}{b}a\right) = \left(b\frac{E}{b}\right)a = Ea = a; \quad \text{d. h. } \frac{E}{b}a = a/b.$$

§ **42.** Es gelten nun für die Quotienten der Strecken dieselben Rechnungsregeln wie für die Zahlenbrüche (§ 14 bis 16). Wir haben nämlich:

1. $$\frac{E}{ab} = \left(\frac{E}{a}\right)\left(\frac{E}{b}\right),$$

denn

$$ab\left(\frac{E}{a}\cdot\frac{E}{b}\right) = \left(a\cdot\frac{E}{a}\right)\left(b\cdot\frac{E}{b}\right) = EE = E. \quad [\text{§ 33 (2)}].$$

2. $$\frac{E}{a/b} = \frac{b}{a},$$

denn

$$(a/b)\left(\frac{b}{a}\right) = \left(a\cdot\frac{E}{b}\right)\left(b\cdot\frac{E}{a}\right) = \left(a\cdot\frac{E}{a}\right)\left(b\cdot\frac{E}{b}\right) = EE = E.$$

Hieraus kann man die übrigen Formeln leicht ableiten. Insbesondere findet man:

3. $$\frac{E}{E\pm a} = E \mp \frac{a}{E\pm a}.$$

---

§ **43.** Hülfssätze.

1. Wir können die Reciproke einer veränderlichen Strecke beliebig klein (beliebig groſs) machen, indem wir die Strecke selbst groſs genug (klein genug) nehmen.

In der That, sei n eine beliebig groſse Zahl, dann bleibt $E/x < E/n$ $(E/x > nE)$, sobald $x > nE$ $(x < E/n)$ genommen ist.

Daraus folgt nach § 35:

2. Wenn der Divisor y nie kleiner (nie gröſser) wird als eine feste Strecke, so können wir den Quotienten x/y beliebig klein (beliebig groſs) machen, indem wir den Dividenden x klein genug (groſs genug) nehmen.

3. Wenn der Dividend x nie gröſser (nie kleiner) wird als eine feste Strecke, so können wir den Quotienten x/y beliebig klein (beliebig groſs) machen, indem wir den Divisor y groſs genug (klein genug) nehmen.

§ **44.** Lehrsatz.

Ist $\lim a_n = a$ und $\lim b_n = b$, so ist $\lim (a_n/b_n) = a/b$.

Wir beweisen zunächst, daſs $\lim (E/b_n) = E/b$ ist.

Zu irgend einer Strecke h' ($h' < b$) können wir eine Stelle k bestimmen, von der ab $b - h' < b_n < b + h'$ bleibt. Es bleibt dann für $n > k$

$$\frac{E}{b+h'} < \frac{E}{b_n} < \frac{E}{b-h'} \quad [\S\ 40\ (4)]$$

oder

$$\frac{E}{b} - \frac{h'}{b(b+h')} < \frac{E}{b_n} < \frac{E}{b} + \frac{h'}{b(b-h')} \quad [\S\ 42\ (3)].$$

Bei beliebig klein vorgegebenem h kann man nun h' so bestimmen, daſs $\frac{h'}{b(b \pm h')} < h$ ist (§ 43).

Folglich ist $\lim (E/b_n) = E/b$.

Der Hauptsatz ist nun leicht zu beweisen. Denn nach § 41 haben wir:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \left(a_n \cdot \frac{E}{b_n}\right) = a \cdot \frac{E}{b} = \frac{a}{b} \quad (\S\ 36).$$

---

§ **45.** Wir schlieſsen dieses Kapitel mit einem Beweise des Satzes, welcher der ganzen Lehre von ähnlichen Figuren zu Grunde liegt.

Dazu wird folgender Satz der Planimetrie vorausgesetzt:

„Werden zwei Gerade von Parallelen geschnitten, und sind die Abschnitte auf der einen Geraden gleich, so sind es auch die Abschnitte auf der anderen Geraden."

§ **46.** Grundsatz der Ähnlichkeitslehre.

Werden zwei Halbstrahlen Ox, Ox' von Parallelen geschnitten, so haben je zwei entsprechende Abschnitte dasselbe Verhältnis.

Beweis. Ox und Ox' mögen von der ersten Parallelen in A, A', von der zweiten in B, B' geschnitten werden; es ist dann zu beweisen:

$$\overline{OA}/\overline{OA'} = \overline{OB}/\overline{OB'}.$$

1. Fall der Kommensurabilität. Wir betrachten zuerst den speciellen Fall, wo $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ kommensurabel sind; d. h. eine Strecke a läfst sich so bestimmen, dafs $\overline{OA} = p \cdot a$ und $\overline{OB} = (p + q) \cdot a$ ist. Ziehen wir durch diese $p + q$ Teilpunkte neue Parallelen, so teilen wir dadurch $\overline{OA'}$ in p und $\overline{OB'}$ in $p + q$ Abschnitte, die einander gleich sind, etwa $\overline{OA'} = p \cdot a'$, $\overline{OB'} = (p + q) \cdot a'$ (§ 45).

Dann haben wir $\overline{OA} / \overline{OA'} = a/a'$ und $\overline{OB} / \overline{OB'} = a/a'$; d. h. $\overline{OA} / \overline{OA'} = \overline{OB} / \overline{OB'}$.

2. Allgemeiner Fall. In allen Fällen können wir zu jeder Zahl n (mit einer gewissen Stelle anfangend) eine Zahl p so bestimmen, dafs

$$\frac{p}{n}\, \overline{OA} \leqq \overline{OB} < \frac{p+1}{n} \cdot \overline{OA} \quad (\S\ 17).$$

Setzen wir $\overline{OB_n} = \frac{p}{n} \cdot \overline{OA}$, so bilden die Strecken $\overline{OB_n}$ bei wachsendem n eine unbegrenzte Folge, und es ist:

$$1. \quad lim\ \overline{OB_n} = \overline{OB} \quad (\text{vergl. } \S\ 21).$$

Ziehen wir nun durch jeden Punkt B_n eine neue Parallele, welche Ox' in B'_n schneiden möge, so behaupten wir, dafs

$$2. \quad lim\ \overline{OB'_n} = \overline{OB'}$$

ist.

In der That, zu jedem beliebig kleinen um B' gelegten Intervalle h' können wir eine Stelle k bestimmen, von wo ab B'_n immer innerhalb des Intervalles h' liegt. Denn ziehen wir durch die Endpunkte von h' zwei Parallelen, so entsteht auf Ox ein Intervall h, mit dem Mittelpunkte B, und zu jedem h können wir dann eine Stelle k so bestimmen, dafs B_n für $n > k$ innerhalb des Intervalles h bleibt. Für $n > k$ wird dann B'_n auch innerhalb des Intervalles h' bleiben.

Aus den Gleichungen 1 und 2 ergiebt sich dann:

$$lim\ (\overline{OB_n} / \overline{OB'_n}) = \overline{OB} / \overline{OB'} \quad (\S\ 44).$$

Aber nach dem ersten Falle ist $\overline{OA} / \overline{OA'} = \overline{OB_n} / \overline{OB'_n}$ für jedes n; folglich ist $\overline{OA} / \overline{OA'} = \overline{OB} / \overline{OB'}$ (§ 22).

Viertes Kapitel.

Potenzierung von Strecken. Wurzeln. Logarithmen.

§ 47. Ein kurzer Rückblick über die bis jetzt erklärten Operationen an Strecken zeigt folgendes:

Wir fingen mit der Fundamentaloperation der Addition an; durch Wiederholung derselben gelangten wir zur Multiplikation mit Zahlen; dann erklärten wir durch Zusammenfassung dieser Operation mit ihrer inversen (der Division mit Zahlen) die Multiplikation mit Brüchen; und schliefslich sind wir mittels eines Grenzprozesses zur Multiplikation mit Strecken gelangt.

Jetzt wollen wir dasselbe Verfahren wiederum durchführen, indem wir die Multiplikation mit Strecken als Ausgangspunkt betrachten.

Wir werden also zunächst die wiederholte Multiplikation (Potenzierung mit Zahlen) diskutieren, dann die Potenzierung mit Brüchen, und endlich die Potenzierung mit Strecken erklären.

§ 48. Potenzierung von Strecken mit Zahlen.

Das Produkt $a \,.\, a \,.\, a \ldots a$, wo die Strecke a $p$mal genommen ist, wollen wir die $p$te Potenz von a nennen, und mit a^p bezeichnen. Dabei soll $a^1 = a$ sein.

Die Strecke a heifst die Basis, die Zahl p der Exponent der Potenz. Die Operation, durch welche wir a in die $p$te Potenz erheben, heifst Potenzierung mit einer Zahl als Exponent.

§ 49. Die folgenden Sätze folgen aus den Sätzen für die Multiplikation von Strecken miteinander (§ 32):

1. $E^p = E$; d. h. alle Potenzen von E sind wieder gleich E.

2. Wenn $a = a'$ ist, so ist $a^p = a'^p$; ist $p = p'$, so ist $a^p = a^{p'}$.

3. Wenn $a < a'$ ist, so ist $a^p < a'^p$; d. h. eine Vergröfserung der Basis vergröfsert auch die Potenz.

4. Wenn $p < p'$ ist, so ist $a^p < a^{p'}$, falls $a > E$, und $a^p > a^{p'}$, falls $a < E$; d. h. eine Vergröfserung des Exponenten entfernt die Potenz von der Einheitsstrecke E (wenn die Basis nicht selbst gleich E ist).

5. Ist umgekehrt $a^p \leqq a'^p$, so mufs $a \leqq a'$ sein; und ist $a^p \leqq a^{p'}$, falls $a > E$, oder $a^p \geqq a^{p'}$, falls $a < E$, so mufs $p \leqq p'$ sein (Beweis indirekt, aus 2, 3, 4).

§ 50. Ferner, aus den Formeln in § 33 und § 42 haben wir:

1. $(ab)^p = a^p b^p$; 2. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$; 3. $(a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p$;

4. $a^{p+q} = a^p a^q$; 5. $a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}$ (wobei $p > q$).

§ 51. Binomischer Lehrsatz.

Wenn die Basis eine Summe zweier Strecken ist, so gilt die Gleichung:

$$(a + b)^p = a^p + \frac{p}{1} a^{p-1} b + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2} a^{p-2} b^2$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{p-3} b^3 + \cdots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-\overline{n-1})}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n} a^{p-n} b^n + \cdots,$$

wobei die Reihe aufhören soll mit demjenigen Gliede, in dem $n = p$ ist.

Den Beweis dieses Satzes für einen beliebig grofsen Exponenten führt man durch „vollständige Induktion“ aus. Es wird nämlich nachgewiesen, dafs, wenn der Satz richtig ist für $p = n$, er auch richtig bleibt für $p = n + 1$, wo n eine beliebige Zahl ist. Aber für $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ wird der Satz direkt bestätigt; er ist daher für $p = 4$ richtig, und folglich für $p = 5$ u. s. w., d. h. für einen beliebigen Wert der Zahl p.

§ 52. Wir erklären nun die inverse Operation.

Ist die Strecke a mit der Zahl p beliebig gegeben, so können wir stets nur eine Strecke x so bestimmen, dafs $x^p = a$ ist, wie aus folgendem klar wird.

Indem wir die Zahl n grofs genug nehmen, können wir E/n so klein machen, dafs $(E/n)^p < a$ wird; denn ist $E/n < a$ gemacht, so wird um so mehr $(E/n)^p < a$ sein [§ 49 (4)].

Indem wir dann bei festem n die Zahl m grofs genug nehmen, können wir $m(E/n)$ so grofs machen, dafs $[m(E/n)]^p > a$ wird; denn ist $m(E/n) > a$ und zugleich $> E$ gemacht, so wird um so mehr $[m(E/n)]^p > a$ sein [§ 49 (4)].

Zu jedem n (mit einer gewissen Stelle anfangend) mufs also nach § 49 (3) eine Zahl r existieren, derart, dafs

$$\left(\frac{r}{n}E\right)^p \leqq a < \left(\frac{r+1}{n}E\right)^p$$

ist. Die Strecken $\left(\frac{r}{n}E\right)^p$ sowie die Strecken $\frac{r}{n}E$ bilden dann eine Folge (§ 18).

Nun ist erstens bei wachsendem n, $lim \left(\frac{r}{n}E\right)^p = a$. Denn wir haben

$$\left(\frac{r+1}{n}E\right)^p - \left(\frac{r}{n}E\right)^p = p\left(\frac{r}{n}E\right)^{p-1}\left(\frac{E}{n}\right)$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{r}{n}E\right)^{p-2}\left(\frac{E}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{E}{n}\right)^p \quad (§ 51),$$

entweder

$$< p \cdot a \cdot \frac{E}{n} + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2} \cdot a \cdot \left(\frac{E}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{E}{n}\right)^p \text{ falls } \frac{r}{n}E > E$$

[§ 49 (4)] oder

$$< p \cdot E \cdot \frac{E}{n} + \frac{p(p-1)}{1 \,.\, 2} \cdot E \cdot \left(\frac{E}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{E}{n}\right)^p, \text{ falls } \frac{r}{n}E < E$$

[§ 49 (4)], was in beiden Fällen schliefslich beliebig klein bleibt (§ 35, § 27).

Zweitens: es hat auch die Folge $\frac{r}{n}E$ einen Grenzwert; denn die Bedingungen von § 25 sind ebenso wie in § 31 erfüllt.

Dieser Grenzwert, $lim \frac{r}{n}E$, ist dann die verlangte Strecke x; denn

$$\left(lim \frac{r}{n}E\right)^p = \left(lim \frac{r}{n}E\right)\left(lim \frac{r}{n}E\right)\ldots\left(lim \frac{r}{n}E\right) = lim\left(\frac{r}{n}E\right)^p = a$$

(§ 36). Dafs es nur eine solche Strecke giebt, folgt aus § 49 (5).

Damit ist folgende Definition gerechtfertigt:

§ 53. Wurzelausziehung aus Strecken mit Zahlen als Exponenten.

Diejenige Strecke, welche man zur $p$ten Potenz erheben mufs, um die Strecke a zu erhalten (§ 52), heifst die $p$te Wurzel aus a, und wird mit $\sqrt[p]{a}$ bezeichnet. Also $(\sqrt[p]{a})^p = a$. Dabei ist $\sqrt[1]{a} = a$.

a heifst die Basis, p der Wurzelexponent, die Operation selbst Wurzelausziehung mit einer Zahl als Exponent.

§ 54. Durch Umkehrung der in § 49 angeführten Sätze finden wir:

1. Alle Wurzeln aus E sind wieder gleich E.
2. Gleiche Wurzeln aus gleichen Strecken sind gleich.
3. Eine Vergröfserung der Basis vergröfsert auch die Wurzel.
4. Eine Vergröfserung des Wurzelexponenten bringt die Wurzel näher an E (wenn die Basis nicht schon gleich E ist).

§ 55. Aus § 50 (1, 2, 3) erhalten wir:

$$1.\ \sqrt[p]{ab} = \sqrt[p]{a}\,.\,\sqrt[p]{b}, \quad 2.\ \sqrt[p]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}}, \quad 3.\ \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

Nach der letzten dieser Formeln können wir also die beiden Operationen in eine einzige zusammenfassen, siehe folgenden Paragraph.

§ 56. Potenzierung von Strecken mit Brüchen als Exponenten.

Wenn wir aus der $p$ten Potenz von a die $q$te Wurzel ziehen, oder die $q$te Wurzel aus a zur $p$ten Potenz erheben [was nach § 55 (3) auf dasselbe hinauskommt], so sagen wir, dafs wir a zur Potenz p/q erheben. Das Resultat wollen wir mit $a^{p/q}$ bezeichnen. Also $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

a ist die Basis, p/q der Exponent. Ein Exponent heifst „ganz“ oder „gebrochen“, je nachdem er eine Zahl oder ein Bruch ist.

Wir haben $a^{p/1} = a^p$ und $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$; d. h. Potenzierung und Wurzelausziehung mit Zahlen sind specielle Fälle der allgemeineren Operation der Potenzierung mit Brüchen.

§ 57. Aus den in § 49 angeführten Sätzen kann man die folgenden ableiten:

1. $E^{p/q} = E$, $a^{n/n} = a$.
2. Gleiche Potenzen von gleichen Strecken sind gleich.

3. Eine Vergröfserung der Basis vergröfsert auch die Potenz.

4. Eine Vergröfserung des Exponenten entfernt die Potenz von der Einheitsstrecke (wenn die Basis nicht selbst gleich E ist).

5. Ist a kleiner (gröfser) als E, so sind auch alle Potenzen von a kleiner (gröfser) als E.

§ 58. Ferner, es gelten die in § 50 angegebenen Formeln auch für gebrochene Exponenten, wie man ohne Schwierigkeit beweisen kann (§ 53, § 55).

Allein der binomische Lehrsatz (§ 51) ist nicht (ohne weiteres) für gebrochene Exponenten gültig, weil die vollständige Induktion nicht anwendbar ist.

§ 59. Wurzelausziehung aus Strecken mit Brüchen als Wurzelexponenten.

Die p/qte Wurzel aus a heifst diejenige Strecke, deren p/qte Potenz gleich a ist. Die verlangte Strecke ist offenbar $a^{q/p}$ (§ 58).

Statt die p/qte Wurzel aus a zu ziehen, kann man also a zur q/pten Potenz erheben. Also $\sqrt[p/q]{a} = a^{q/p}$.

---

§ 60. Ungleichungen.

In den folgenden Ungleichungen sind m und n beliebige natürliche Zahlen, die gröfser als 1 sind.

$$1.\quad \left(E - \frac{E}{m}\right)^{mn} < \frac{E}{n} < E < nE < \left(E + \frac{E}{m}\right)^{mn}.$$

$$2.\quad E - \frac{E}{n} < \left(\frac{E}{m}\right)^{\frac{1}{mn}} < E < (mE)^{\frac{1}{mn}} < E + \frac{E}{n}.$$

Beweis.

Da $m > 1$ und $n > 1$ sind, haben wir sofort:

$$E/n < E < nE \quad \text{und} \quad (E/m)^{\frac{1}{mn}} < E < (mE)^{\frac{1}{mn}} \quad [\S\ 57\ (5)].$$

Aus dem binomischen Lehrsatze (§ 51) sehen wir:

$$nE < (E + E/m)^{mn}.$$

Ferner haben wir

$$E - E/m < \frac{E}{E + E/m},$$

da $E - E/m^2 < E$ ist.

Folglich:

$$(E - E/m)^{mn} < \frac{E}{(E + E/m)^{mn}} < \frac{E}{nE} = E/n$$

[§ 49 (3), § 50 (2)].

Damit ist 1 bewiesen.

Aus dem ersten Teile von 1 haben wir nach § 54 (3):

$$E - E/m < (E/n)^{\frac{1}{mn}};$$

ebenso aus dem letzten Teile:

$$(nE)^{\frac{1}{mn}} < E + E/m.$$

Vertauschen wir dann m und n, so haben wir 2.

§ 61. Aus diesen Ungleichungen ergiebt sich folgender wichtiger Satz:

Lehrsatz.

Ist a eine beliebig gegebene Strecke, so können wir $a^{1/p}$ beliebig nahe an E bringen, indem wir die Zahl p grofs genug nehmen.

In der That sei n beliebig grofs und m so bestimmt, dafs $E/m < a < mE$ ist.

Dann wird $E - E/n < a^{1/p} < E + E/n$, sobald $p > mn$ genommen ist [§ 54 (3), § 60 (2)].

---

§ 62. Mittels eines Grenzprozesses wollen wir nun eine Operation an Strecken erklären, welche auf die Potenzierung mit Brüchen gegründet ist, wo aber der Operator sowohl wie der Operand eine Strecke ist. Wir nennen sie die „Potenzierung mit Strecken". (Vergl. § 30.)

§ 63. Potenzierung von Strecken mit Strecken als Exponenten.

Die Erhebung der Strecke a zur Potenz b, wo b auch eine Strecke ist, erklären wir in folgender Weise.

Wir messen zunächst den Operator b durch dieselbe Einheitsstrecke E, die schon bei der Multiplikation der Strecken (§ 31) festgesetzt worden ist. Dann haben wir zwei Fälle — einen speciellen und einen allgemeinen (§ 17).

1. Im Falle der Kommensurabilität — d. h. wenn

$b = (q/n)E$ ist — soll die $b$te Potenz von a einfach gleich $a^{q/n}$ sein (§ 56).

2. In allen Fällen können wir eine unbegrenzte Folge von Brüchen q/n bestimmen nach dem Gesetze:

$$\frac{q}{n}E \leqq b < \frac{q+1}{n}E \quad (\S\ 19).$$

Indem wir nun die Brüche dieser Folge der Reihe nach als Exponenten für den Operanden a benutzen, bilden wir eine Streckenfolge, deren $n$tes Element $a^{q/n}$ ist. Den Grenzwert dieser Folge bei wachsendem n, $\lim a^{q/n}$, wollen wir dann die $b$te Potenz von a nennen und mit a^b bezeichnen.

Dafs die Folge $a^{q/n}$ thatsächlich einen Grenzwert hat, beweisen wir gleich unten.

Die Strecke a heifst die Basis, b der Exponent (nach Analogie von § 48).

Wenn der Exponent mit E kommensurabel ist, ist es für das Resultat gleichgültig, ob der Exponent ein Bruch oder eine Strecke ist.

§ 64. Dafs die Folge $a^{q/n}$ in allen Fällen einen Grenzwert hat, folgt aus § 25.

In der That, wenn $a > E$ ist, haben wir $a^{\frac{q}{n}} < a^{\frac{q+1}{n}}$ und die Differenz $a^{\frac{q+1}{n}} - a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{q}{n}}(a^{1/n} - E) < a^{\frac{q+1}{n}}(a^{1/n} - E)$ bleibt schliefslich beliebig klein. (Denn der Faktor $a^{\frac{q+1}{n}}$ ist eine wesentlich abnehmende Folge, deren Elemente also alle kleiner sind als eine feste Strecke, während der Faktor $a^{1/n} - E$ nach § 61 schliefslich beliebig klein bleibt. Folglich bleibt das Produkt schliefslich beliebig klein, nach § 35.)

Ebenso wenn $a < E$ ist, haben wir $a^{\frac{q+1}{n}} < a^{\frac{q}{n}}$ und die Differenz

$$a^{\frac{q}{n}} - a^{\frac{q+1}{n}} = a^{\frac{q+1}{n}}\left[\left(\frac{E}{a}\right)^{1/n} - E\right] < a^{\frac{q}{n}}\left[\left(\frac{E}{a}\right)^{1/n} - E\right]$$

bleibt wie vorhin schliefslich beliebig klein.

Also in beiden Fällen besitzt die Folge $a^{q/n}$ einen Grenzwert, nach § 25.

Falls $a = E$, ist ohne weiteres $\lim a^{q/n} = E$ [§ 57 (1)].

§ 65. Sätze über die Potenzierung von Strecken.

1. Aus der Definition folgt sofort: $E^a = E$ und $a^E = a$.

2. Wenn $a = a'$ ist, so ist $a^b = a'^b$; wenn $b = b'$ ist, so ist $a^b = a^{b'}$ (§ 22).

3. Ist $a < a'$, so ist $a^b < a'^b$; d. h. eine Vergröfserung der Basis vergröfsert auch die Potenz.

Beweis.

Wir haben $a^{q/n} < a'^{q/n}$ [§ 57 (3)] und die Differenz

$$a'^{q/n} - a^{q/n} = a^{q/n}\,[(a'/a)^{q/n} - E].$$

Erstens hat der Faktor $a^{q/n}$ den Grenzwert a^b (§ 63).

Zweitens hat der Faktor $(a'/a)^{q/n} - E$ auch einen Grenzwert, nach § 29. (Denn $a'/a > E$, somit $(a'/a)^{q/n} > E$; und da die q/n eine wesentlich zunehmende Folge bilden, so mufs $lim\ (a'/a)^{q/n} > E$ sein.)

Folglich hat das Produkt auch einen Grenzwert (§ 36), so dafs $a'^{q/n} - a^{q/n}$ schliefslich gröfser als eine feste Strecke bleibt.

Es ist also nach § 23 $lim\ a^{q/n} < lim\ a'^{q/n}$ oder $a^b < a'^b$.

4. Ist $b < b'$, so ist $a^b < a^{b'}$, falls $a > E$, und $a^b > a^{b'}$, falls $a < E$; d. h. eine Vergröfserung des Exponenten entfernt die Potenz von E (wenn die Basis nicht selbst gleich E ist).

Beweis.

Bestimmen wir eine Zahl k derart, dafs $E/k < (b' - b)/2$ ist, so ist für $n > k$:

$$b < \frac{q+1}{n} E < \frac{q'}{n} E \leqq b'.$$

Wenn $a > E$ ist, wird dann sein:

$$a^b < a^{\frac{q+1}{n}} < a^{q'/n} \leqq a^{b'} \text{ [§ 57 (4)], d. h. } a^b < a^{b'}.$$

Wenn $a < E$ ist, wird ebenso $a^b > a^{b'}$ sein.

5. Setzen wir nun $b' = E$ bezw. $b = E$, so sehen wir: Die Operation der Potenzierung entfernt die Basis von E, oder bringt sie näher an E, je nachdem der Exponent gröfser oder kleiner als E ist (vorausgesetzt, dafs die Basis nicht von vornherein gleich E ist). Ist die Basis a kleiner (gröfser) als E, so sind auch alle Potenzen von a kleiner (gröfser) als E.

§ **66.** Es gelten nun für die Potenzierung mit Strecken die folgenden Rechnungsregeln:

1. $\boldsymbol{(ab)^c = a^c b^c}$, 2. $\boldsymbol{(a/b)^c = a^c/b^c}$, 3. $\boldsymbol{(a^b)^c = a^{bc}}$,

4. $\boldsymbol{a^{b+c} = a^b a^c}$,

5. $\boldsymbol{a^{b-c} = a^b/a^c}$, wo $b > c$ ist.

Beweise. Sei

$$\frac{q}{n}E \leqq b < \frac{q+1}{n}E \quad \text{und} \quad \frac{r}{n}E \leqq c < \frac{r+1}{n}E \ (\S\ 63).$$

1. Es ist

$$a^c = lim\ a^{r/n}, \quad b^c = lim\ b^{r/n},$$

also

$$a^c b^c = lim\ (a^{r/n} b^{r/n}) = lim\ (ab)^{r/n} \quad (\S\ 36,\ \S\ 58).$$

Aber auch $(ab)^c = lim\ (ab)^{r/n}$; folglich $(ab)^c = a^c b^c$ (§ 22).

2. In derselben Weise beweist man die zweite Formel, nach § 44.

3. Wenn $a > E$ ist, so haben wir:

$$a^{\frac{qr}{nn}} \leqq (a^b)^c < a^{\frac{q+1}{n} \cdot \frac{r+1}{n}} \quad [\S\ 65\ (3,\ 4)].$$

Nun ist

$$a^{\frac{q+1}{n} \cdot \frac{r+1}{n}} - a^{\frac{qr}{nn}} = a^{\frac{qr}{nn}} \left[a^{\frac{1}{n}\left(\frac{q}{n} + \frac{r}{n}\right) + \frac{1}{nn}} - E\right]$$

$$\leqq (a^b)^c \left[a^{\frac{1}{n}(b+c) + \frac{E}{nn}} - E\right],$$

welches nach § 61 schliefslich beliebig klein bleibt.

Es ist also $(a^b)^c = lim\ a^{\frac{qr}{nn}}$.

Aber ebenso ist $a^{bc} = lim\ a^{\frac{qr}{nn}}$; folglich $(a^b)^c = a^{bc}$ (§ 22).

Für den Fall $a < E$ ist der Beweis in ähnlicher Weise zu führen. Wenn $a = E$ ist, so ist der Satz ohne weiteres klar, nach § 65 (1).

4. Wir haben $\frac{q+r}{n}E \leqq b + c < \frac{q+r+2}{n}E$; dann finden wir, wie in 3:

$$a^{b+c} = lim\ a^{\frac{q+r}{n}} = lim\ (a^{q/n} \,.\, a^{r/n}) = a^b a^c.$$

5. Ebenso: $\frac{q+r-1}{n}E \leqq b - c < \frac{q-r+1}{n}E$, und

$$a^{b-c} = lim\ a^{\frac{q-r}{n}} = lim\ (a^{q/n} / a^{r/n}) = a^b / a^c.$$

§ 67. Ungleichungen.

Wir beweisen jetzt die folgenden Ungleichungen, wo m und n beliebige natürliche Zahlen, gröſser als 1, sind.

$$E - \frac{E}{n} < \left(E - \frac{E}{2mn}\right)^m < E < \left(E + \frac{E}{2mn}\right)^m < E + \frac{E}{n}.$$

Beweis.

Aus dem binomischen Lehrsatze (§ 51) haben wir:

$$\left(E + \frac{h}{m}\right)^m = E + \frac{mh}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}\left(\frac{h}{m}\right)^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\frac{h}{m}\right)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-\overline{m-1})}{1 \cdot 2 \dots m}\left(\frac{h}{m}\right)^m$$
$$= E + h + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)h^2 + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)h^3 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)h^m$$
$$< E + h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \cdots + \frac{1}{m!}h^m$$
$$< E + h + h(E/2 + E/2^2 + E/2^3 + \cdots + E/2^{m-1}),$$

wenn $h < E$ genommen ist. Setzen wir nun

$$S = E/2 + E/2^2 + \cdots + E/2^{m-1},$$

so ist $S - \frac{1}{2}S = \frac{E}{2} - \frac{E}{2^{m-1}}$, oder $S = E - E/2^{m-1}$, also

$$S < E \text{ für } m > 1.$$

Folglich: $\left(E + \frac{h}{m}\right)^m < E + 2h$, wobei $h < E$.

Nehmen wir $h = E/2n$, so haben wir:

$$1. \quad \left(E + \frac{E}{2mn}\right)^m < E + \frac{E}{n}.$$

Ferner haben wir: $E - \frac{E}{2mn} > \dfrac{E}{E + \frac{E}{2m(n-1)}}$, wie man leicht verifizieren kann.

Folglich nach 1:

$$\left(E - \frac{E}{2mn}\right)^m > \frac{E}{\left(E + \frac{E}{2m(n-1)}\right)^m}$$

$$> \frac{E}{E + \frac{E}{n-1}} = E - \frac{E}{n+1} > E - \frac{E}{n}.$$

Die übrigen Teile des Satzes folgen sofort aus § 57 (5).

---

§ **68.** Hülfssätze.

Seien m und n feste Zahlen, wovon n beliebig grofs.

1. Bleibt die Basis x gröfser (kleiner) als eine feste Strecke, die selbst gröfser (kleiner) als E ist, so können wir die Potenz x^y beliebig grofs (beliebig klein) machen, indem wir den Exponenten y grofs genug nehmen.

Bleibt $x > E + E/m$, so wird $x^y > nE$, wenn nur $y > mnE$ genommen ist [§ 60 (1)].

Bleibt $x < E - E/m$, so wird $x^y < E/n$, wenn nur $y > mnE$ genommen ist [§ 60 (1)].

2. Bleibt die Basis x zwischen zwei festen Strecken, so können wir die Potenz x^y beliebig nahe an E bringen, indem wir den Exponenten y klein genug nehmen.

Bleibt $E/m < x < mE$, so wird $E - E/n < x^y < E + E/n$, wenn nur $y < E/mn$ genommen ist [§ 60 (2)].

3. Bleibt der Exponent gröfser als eine feste Strecke, so können wir die Potenz x^y beliebig klein (beliebig grofs) machen, indem wir die Basis x klein genug (grofs genug) nehmen.

Bleibt $y > E/m$, so wird $x^y < E/n$, wenn nur $x < (E/n)^m$ genommen ist.

Bleibt $y > E/m$, so wird $x^y > nE$, wenn nur $x > (nE)^m$ genommen ist.

4. Bleibt der Exponent y kleiner als eine feste Strecke, so können wir die Potenz x^y beliebig nahe an E bringen, indem wir die Basis x nahe genug an E nehmen.

Bleibt $y < mE$, so wird $E - E/n < x^y < E + E/n$, wenn nur $E - E/2mn < x < E + E/2mn$ genommen ist (§ 67).

§ **69.** Lehrsatz.

Ist $lim\ a_n = a$ und $lim\ b_n = b$, so ist $lim\ (a_n{}^{b_n}) = a^b$.

Beweis.

Zu irgend einer Strecke h' ($h' < a$, $h' < b$, $h' < |a - E|$) können wir eine Stelle k bestimmen, von der ab
$a - h' < a_n < a + h'$ und $b - h' < b_n < b + h'$ bleibt.

Wenn $a > E$ ist, bleibt dann für $n > k$:

$$(a - h')^{b - h'} < a_n{}^{b_n} < (a + h')^{b + h'}$$

[§ 65 (3, 4)], oder

$$(a - h')^b \cdot \left(\frac{E}{a - h'}\right)^{h'} < a_n{}^{b_n} < (a + h')^b \cdot (a + h')^{h'}$$

[§ 66 (5)], oder

$$a^b \cdot \left(E - \frac{h'}{a}\right)^b \cdot \left(\frac{E}{a} + \frac{h'}{a(a - h')}\right)^{h'} < a_n{}^{b_n} < a^b \cdot \left(E + \frac{h'}{a}\right)^b \cdot (a + h')^{h'}$$

[§ 66 (1)] oder

$$a^b \cdot (E - h'') \cdot (E - h'') < a_n{}^{b_n} < a^b \cdot (E + h'') \cdot (E + h''),$$

wo h'' nach § 68 (2, 4) beliebig klein gemacht werden kann, indem wir h' klein genug nehmen; oder

$$a^b - a^b\,(2\,h'' - h''^2) < a_n{}^{b_n} < a^b + a^b(2\,h'' + h''^2),$$

oder

$$a^b - h < a_n{}^{b_n} < a^b + h,$$

wo h nach § 35 beliebig klein gemacht werden kann, indem wir h' klein genug nehmen.

Zu jedem noch so kleinen vorgegebenen h können wir also (falls $a > E$) eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$:

$$a^b - h < a_n{}^{b_n} < a^b + h$$

bleibt; d. h. $lim\ (a_n{}^{b_n}) = a^b$.

In ähnlicher Weise beweist man den Satz für die Fälle $a < E$ und $a = E$.

---

§ **70.** Da das kommutative Gesetz für die Potenzierung nicht mehr gilt, haben wir neben dieser Operation nicht nur eine, sondern zweierlei inverse Operationen, je nachdem die Basis oder der Exponent gesucht wird. Diese wollen wir jetzt erklären.

§ 71. Wurzelausziehung aus Strecken mit Strecken als Wurzelexponenten.

Die $b$te Wurzel aus a heifst diejenige Strecke, deren $b$te

Potenz gleich a ist. Die verlangte Strecke ist offenbar $a^{E/b}$ [§ 66 (3)].

Statt die $b$te Wurzel auszuziehen, kann man also in die Potenz E/b erheben, d. h. $\sqrt[b]{a} = a^{E/b}$.

§ 72. Sind zwei Strecken a und b beide gröfser als E oder beide kleiner als E, so können wir stets nur eine Strecke x so bestimmen, dafs $b^x = a$ ist, wie aus folgendem klar wird.

Sei z. B. $a > E$ und $b > E$.

Indem wir die Zahl n grofs genug nehmen, können wir E/n so klein machen, dafs $b^{E/n} < a$ wird [§ 68 (2)].

Indem wir dann bei festem n die Zahl m grofs genug nehmen, können wir $m(E/n)$ so grofs machen, dafs $b^{\frac{mE}{n}}$ über a hinaus wächst [§ 68 (1)].

Es mufs also zu jedem n (von einer gewissen Stelle ab) eine Zahl r existieren, derart, dafs

$$b^{\frac{r}{n}E} \leqq a < b^{\frac{r+1}{n}E} \quad \text{ist [§ 65 (4)].}$$

Es bilden dann $b^{\frac{r}{n}E}$ sowie $\frac{r}{n}E$ eine Folge von Strecken (§ 18).

Nun wird erstens $lim\, b^{\frac{r}{n}E} = a$ sein, denn die Differenz

$$b^{\frac{r+1}{n}E} - b^{\frac{r}{n}E} = b^{\frac{r}{n}E}\,(b^{\frac{E}{n}} - E)$$

bleibt nach § 61 schliefslich beliebig klein.

Zweitens wird die Folge $\frac{r}{n}E$ selbst einen Grenzwert haben, nach § 25.

Diese Strecke $lim\frac{r}{n}E$ ist dann die verlangte Strecke x; denn

$$b^{lim\frac{r}{n}E} = lim\, b^{\frac{r}{n}E} = a \quad (\S\ 69).$$

In ähnlicher Weise zeigt man, dafs die gesuchte Strecke auch im Falle $a < E$, $b < E$ sich immer finden läfst.

Dafs es nur eine solche Strecke giebt, folgt aus § 65 (4) (Beweis indirekt).

Somit ist folgende Definition gerechtfertigt.

§ 73. Logarithmierung von Strecken mit Strecken als Basen.

Der Exponent derjenigen Potenz, zu welcher wir b erheben müssen, um a zu erhalten (§ 72), heifst der absolute Logarithmus von a zur Basis b, und wird mit ${}^{b}lg\, a$ bezeichnet. Also $b^{{}^{b}lg\, a} = a$, wobei entweder $a > E$, $b > E$ oder $a < E$, $b < E$ sein mufs.

Hier ist a als Operand aufzufassen, b als Operator. b heifst die Basis des Logarithmus.

Es mufs betont werden, dafs wir hiermit dem Symbol ${}^{b}lg\, a$ nur dann eine Bedeutung gegeben haben, wenn entweder $a > E$, $b > E$ oder $a < E$, $b < E$ ist. [Vergl. § 65 (5).]

Ist eine beliebige von E verschiedene Basis b festgesetzt, so können wir zu jeder von E verschiedenen Strecke a entweder ${}^{b}lg\, a$ oder ${}^{b}lg\, (E/a)$ bestimmen (§ 41).

§ 74. Sätze über absolute Logarithmen.

1. ${}^{a}lg\, a = E$. ${}^{\sqrt[a]{a}}lg\, a = a$.

2. Logarithmen von gleichen Strecken zu gleichen Basen sind gleich.

3. Eine Vergröfserung der Strecke vergröfsert oder vermindert ihren absoluten Logarithmus, je nachdem die Basis gröfser oder kleiner als E ist.

In der That sei $a < a'$, $x = {}^{b}lg\, a$, $x' = {}^{b}lg\, a'$. Dann ist $b^x = a$, und $b^{x'} = a'$; oder $b^x < b^{x'}$. Es mufs also $x < x'$ bei $a > E$, $b > E$, und $x > x'$ bei $a < E$, $b < E$ sein.

Denn wäre $x \gtreqless x'$ bei $b > E$, bezw. $x \leqq x'$ bei $b < E$, so wäre nach § 65 (4) $b^x \gtreqless b^{x'}$, was ausgeschlossen ist.

4. Eine Vergröfserung der Basis bringt den Logarithmus näher an E.

In der That sei $b < b'$, $y = {}^{b}lg\, a$, $y' = {}^{b'}lg\, a$. Dann ist $b^y = a$, und $b'^{y'} = a$; oder $b^y = b'^{y'}$. Es mufs also $y > y'$ bei $b > E$, $b' > E$, und $y < y'$ bei $b < E$, $b' < E$ sein.

Denn wäre $y \leqq y'$ im ersten Falle, bezw. $y \gtreqless y'$ im zweiten Falle, so wäre nach [§ 65 (3, 4)] $b^y < b'^{y'}$, was ausgeschlossen ist.

§ 75. Es gelten nun für die absoluten Logarithmen folgende Rechnungsregeln:

1. $\left\{\begin{array}{ll} {}^b lg\,(aa') = {}^b lg\,a + {}^b lg\,a', & \text{wobei entweder } b > E,\ a > E,\ a' > E, \text{ oder } b < E,\ a < E,\ a' < E; \\ {}^b lg\left(\dfrac{E}{aa'}\right) = {}^b lg\,\dfrac{E}{a} + {}^b lg\,\dfrac{E}{a'}, & \text{wobei entweder } b > E,\ a < E,\ a' < E, \text{ oder } b < E,\ a > E,\ a' > E; \\ {}^b lg\left(a\dfrac{E}{a'}\right) = {}^b lg\,a + {}^b lg\,\dfrac{E}{a'}, & \text{wobei entweder } b > E,\ a > E,\ a' < E, \text{ oder } b < E,\ a < E,\ a' > E. \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{ll} {}^b lg\,(a^c) = c\,({}^b lg\,a), & \text{wobei entweder } b > E,\ a > E, \text{ oder } b < E,\ a < E; \\ {}^b lg\left(\dfrac{E}{a^c}\right) = c\left({}^b lg\,\dfrac{E}{a}\right), & \text{wobei entweder } b > E,\ a > E, \text{ oder } b < E,\ a < E. \end{array}\right.$

Ferner finden wir die Relationen:

3. ${}^a lg\,b = \dfrac{E}{{}^b lg\,a}$, wobei entweder $a > E$, $b > E$ oder $a < E$, $b < E$.

4. $\left\{\begin{array}{ll} {}^c lg\,a = \dfrac{{}^b lg\,a}{{}^b lg\,c}, & \text{wobei entweder } a > E,\ b > E,\ c > E, \text{ oder } a < E,\ b < E,\ c < E; \\ {}^c lg\,(E/a) = \dfrac{{}^b lg\,a}{{}^b lg\,(E/c)}, & \text{wobei entweder } a > E,\ b > E,\ c < E, \text{ oder } a < E,\ b < E,\ c > E. \end{array}\right.$

---

§ 76. Lehrsatz.

Ist $lim\ a_n = a$, $lim\ b_n = b$, und entweder $a > E$, $b > E$, oder $a < E$, $b < E$, so ist 1. von einer gewissen Stelle ab entweder $a_n > E$, $b_n > E$ oder $a_n < E$, $b_n < E$, und 2. $lim\ ({}^{b_n} lg\ a_n) = {}^b lg\ a$.

Beweis:

Der erste Teil des Satzes ist sofort klar, für den zweiten Teil geben wir einen indirekten Beweis (wie wir auch in § 44 hätten verfahren können).

Wir setzen $c_n = {}^{b_n} lg\ a_n$ und $c = {}^b lg\ a$; so ist $b_n^{c_n} = a_n$ und $b^c = a$. Man soll beweisen: $lim\ c_n = c$.

Zu jeder noch so kleinen Strecke h ($h < b$, $h < |b - E|$, $h < a$) können wir eine Stelle k so bestimmen, dafs für $n > k$:

A. $b - h < b_n < b + h$ und B. $b^c - h < b_n^{c_n} < b^c + h$
bleiben.

Jetzt nehmen wir an, dafs c nicht der Grenzwert von c_n wäre. Dann gäbe es (mindestens) eine feste Strecke d, derart, dafs zu jedem k (mindestens) ein r sich so bestimmen läfst, dafs c_{k+r} aufserhalb des Intervalles $c - d$ bis $c + d$ liegt; d. h. entweder $c_{k+r} < c - d$ oder $c + d < c_{k+r}$.

Nach A. würden wir dann haben (falls $b > E$):
entweder

$$(b - h)^{c+d} < (b - h)^{c_{k+r}} < b_{k+r}^{c_{k+r}}$$

oder

$$b_{k+r}^{c_{k+r}} < (b + h)^{c_{k+r}} < (b + h)^{c-d} \quad [\S\ 65\ (3, 4)],$$

also nach B., entweder

$$(b - h)^{c+d} < b^c + h \quad \text{oder} \quad b^c - h < (b + h)^{c-d}$$

für jede noch so kleine Strecke h.

Nun können wir bei beliebig kleinem vorgegebenem h',

$$b^{c+d} - h' < (b - h)^{c+d} \quad \text{und} \quad (b + h)^{c-d} < b^{c-d} + h'$$

machen, indem wir h klein genug nehmen [§ 68 (4)].

Wenn unsere Annahme richtig wäre, wäre also entweder

$$b^{c+d} - b^c < h + h' \quad \text{oder} \quad b^c - b^{c-d} < h + h',$$

für beliebig kleine h und h'. Diese beiden Ungleichungen sind aber offenbar unmöglich; unsere Annahme ist also unzulässig, und es mufs $c = lim\ c_n$ sein.

In derselben Weise führt man den Beweis im Falle $a < E$, $b < E$.

§ 77. Wir dürfen nun die Aufgabe unseres ersten Teiles, die wichtigsten Operationen an absoluten Strecken streng zu erklären und die Grundsätze derselben zu entwickeln, als vollendet betrachten.

Freilich liegt der Gedanke nahe, noch höhere Operationen zu definieren, indem wir zunächst die wiederholte Potenzierung als eine einzige Operation betrachten und dann denselben Plan verfolgen, den wir in § 47 entworfen haben. Weil aber das kommutative Gesetz nicht mehr für die Potenzierung gilt, ist dieser Plan nicht ohne weiteres durchzuführen; aufserdem haben diese höheren Operationen sich für die Wissenschaft nicht als nötig erwiesen, und ihre Theorie ist selten entwickelt worden.

Zweiter Teil.

Vektoren der Ebene.

Fünftes Kapitel.

Vektor - Addition.

§ 78. Wir gehen nun zum zweiten Teile unserer Betrachtungen über, indem wir als neues Moment die Richtung der Strecken in der Ebene berücksichtigen (§ 1).

Die Grundsätze der euklidschen Geometrie der Ebene werden als bekannt vorausgesetzt.

§ 79. Vektoren der Ebene.

In der Ebene denken wir uns zunächst einen Punkt O (Anfangspunkt) und einen von O aus gezogenen Halbstrahl Ox (Anfangsrichtung) festgelegt.

Jeden anderen Punkt A der Ebene kann man nun von O aus dadurch erreichen, dafs man eine Strecke von passender Länge und Richtung durchläuft; nur um den Punkt O selbst zu erreichen, hat man keinen Weg zu machen.

Einen geradlinigen Weg, der uns von O zu einem anderen Punkte A der Ebene führt, sowie das Stillstehen am Punkte O wollen wir einen „Vektor der Ebene“ oder schlechthin einen „Vektor“ nennen.

Ein „eigentlicher Vektor“ ist ein solcher, der uns zu einem von O verschiedenen Punkte führt.

Denjenigen Vektor, der bedeutet, dafs wir im Anfangspunkte bleiben sollen, nennen wir den „uneigentlichen Vektor“ oder „Vektor Null“ (0).

Durch jeden Vektor wird also ein Punkt der Ebene eindeutig bestimmt; und umgekehrt, jedem Punkte der Ebene entspricht ein bestimmter Vektor.

Beliebige Vektoren bezeichnen wir mit A, B, C, ... und die absolute Länge eines eigentlichen Vektors A mit $|A|$.

Wir werden häufig von dem „Punkte A" sprechen, anstatt von dem „Vektor A", der ihm entspricht.

§ 80. Zwei Vektoren A, B heifsen gleich, wenn sie demselben Punkte entsprechen; in Zeichen $A = B$. Ist $A = B$ und $B = C$, so ist $A = C$.

Zwei eigentliche Vektoren heifsen entgegengesetzt, wenn sie dieselbe Länge und entgegengesetzte Richtung haben, d. h. wenn die Verbindungslinie der beiden Punkte durch O gehälftet wird.

§ 81. Absolute Vektoren.

Wenn wir uns auf eigentliche Vektoren der Anfangsrichtung Ox beschränken, können wir diese Vektoren als absolute Strecken behandeln. Wir nennen sie daher „absolute Vektoren", bezeichnen sie mit a, b, c, ... und übertragen auf sie alle Definitionen und Resultate des ersten Teiles.

Die früheren Operationen an absoluten Strecken werden also als specielle Fälle der jetzt zu erklärenden Operationen an allgemeinen Vektoren auftreten.

§ 82. „Reelle" Vektoren.

Die Gerade, auf welcher der Halbstrahl Ox (§ 79) liegt, heifst die Hauptachse oder (nach einer unpassenden Terminologie, die in der Geschichte der Mathematik üblich geworden und heute wohl nicht mehr abzuändern ist) die „reelle" Achse. Vektoren dieser Achse werden dann „reelle Vektoren" genannt.

Ein eigentlicher reeller Vektor heifst positiv oder negativ, je nachdem er in der Richtung Ox oder in der entgegengesetzten Richtung läuft.

Beliebige reelle Vektoren — positiv, negativ oder Null — wollen wir mit α, β, γ, ... bezeichnen.

Alle nicht „reelle" Vektoren heifsen nach der alten Terminologie „imaginär".

§ **83.** Von zwei ungleichen reellen Vektoren α, β wollen wir denjenigen grösser (kleiner) nennen, der weiter nach der positiven (negativen) Richtung liegt als der andere. In Zeichen $\alpha > \beta$ ($\alpha < \beta$).

Wir benutzen also die Symbole $<$ und $>$ hier in einer neuen Bedeutung, die nicht mit der in § 2 (1) gegebenen zu verwechseln ist. Die Benennung „kleiner" oder „grösser" bezieht sich nämlich hier auf die relative Lage der Punkte — dort auf die relative Länge der Strecken.

Sind zwei reelle Vektoren α, β beliebig gegeben, so muss entweder 1. $\alpha = \beta$, 2. $\alpha < \beta$ oder 3. $\alpha > \beta$ sein; und wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ ist, so ist $\alpha < \gamma$.

---

§ **84.** Im folgenden werden drei Hauptoperationen an Vektoren erklärt, für welche die Rechnungsregeln formal-ähnlich mit denen ausfallen, die wir für die Addition [§ 2 (2), § 4], die Multiplikation (§ 33) und die Potenzierung (§ 66) von Strecken mit Strecken nachgewiesen haben[1]). Statt neue Namen für diese Operationen zu schaffen, nennen wir sie daher die Addition (§ 85), die Multiplikation (§ 97) und die Potenzierung (§ 112, § 129) von Vektoren mit Vektoren.

Die inversen Operationen wollen wir dann nach derselben Analogie benennen.

---

§ **85.** **Addition von Vektoren.**

Aus zwei beliebigen Vektoren A, B können wir durch folgende Regeln stets einen dritten Vektor ableiten, den wir die „Summe A plus B" nennen und mit $A + B$ bezeichnen wollen:

a) Wenn B von Null verschieden ist, so erreichen wir den Punkt $A + B$ dadurch, dass wir vom Punkte A aus einen Weg durchlaufen, der dieselbe Länge und Richtung wie B hat.

b) Dabei soll $A + 0 = A$ sein.

§ **86.** Aus den Lehrsätzen der Planimetrie über die Kongruenz von Dreiecken findet man leicht:

[1]) In der Geschichte der Mathematik hat die Aufgabe, „differenzierbare Funktionen" zu bilden, die eben diesen Rechnungssätzen gehorchen, zur Herstellung dieser scheinbar willkürlichen Definitionen geführt.

1. Wenn $B = B'$ ist, so ist $A + B = A + B'$; und wenn $B \neq B'$ ist, so ist $A + B \neq A + B'$.

2. $A + B = B + A$.

3. $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Die Summe $A + B$ wird nur dann reell sein, wenn die Punkte A und B entweder selbst auf der reellen Achse oder equidistant auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen.

§ 87. Lehrsatz.

Die absolute Länge der Summe zweier Vektoren ist nicht gröfser als die Summe (und nicht kleiner als die Differenz) der absoluten Längen der Summanden:

Denn in jedem Dreieck ist jede Seite nicht gröfser als die Summe (und nicht kleiner als die Differenz) der beiden anderen Seiten.

---

§ 88. Subtraktion von Vektoren.

Umgekehrt, wenn A und B gegeben sind, so untersuchen wir, ob ein Vektor X existiert, derart, dafs $X + B = A$ ist. Wenn wir einen solchen finden können, so wollen wir ihn die „Differenz A minus B" nennen und mit $A - B$ bezeichnen (nach Analogie von § 5).

Wir finden:

a) Wenn B von 0 verschieden ist, so ist $A - B = A + B'$, wo B' der zu B entgegengesetzte Vektor ist. Insbesondere ist $A - A = 0$.

b) $A - 0 = A = A + 0$.

Die Subtraktion ist also immer durchführbar, was bei den absoluten Strecken nicht der Fall war.

§ 89. In allen Fällen finden wir:

1. $A - (B + C) = A - B - C$, $A - (B - C) = A - B + C$.

2. Aus $A + C = B$ folgt $A = B - C$ und aus $A - C = B$ folgt $A = B + C$.

Die Differenz $A - B$ wird nur dann reell sein, wenn die Punkte A und B entweder selbst auf der reellen Achse liegen oder auf derselben Seite equidistant sind.

§ 90. Statt $0 - A$ wollen wir einfach $-A$ schreiben. $-A$ ist also, falls $A \neq 0$, der zu A entgegengesetzte Vektor;

und $-0 = 0$. Folglich: $A - B = A + (-B)$ und $A - (-B) = A + B$.

Da wir die positiven reellen Vektoren mit a, b, c, ... bezeichnet haben, können wir also jetzt die negativen mit $-a$, $-b$, $-c$, ... bezeichnen.

---

§ 91. Die wiederholte Addition eines Vektors zu sich selbst ändert seine Richtung nicht. Indem wir dem im § 47 entworfenen Plane wieder folgen, werden wir dann zu den folgenden Operationen geführt.

Multiplikation und Division von Vektoren mit Zahlen, Brüchen und absoluten Strecken.

Es sei M für den Augenblick eine Zahl, ein Bruch oder eine absolute Strecke. (Vergl. § 34.)

a) Unter $M \,.\, A$ bezw. A/M (wo $A \neq 0$) verstehen wir dann den Vektor, den wir erhalten, wenn wir die absolute Länge von A mit M multiplizieren (§ 31) bezw. dividieren (§ 39), ohne die Richtung von A zu ändern.

b) Dabei soll $M \,.\, 0 = 0$ und $0/M = 0$ sein.

Diese Operationen bieten also nichts neues dar.

Sechstes Kapitel.

Vektor-Multiplikation.

§ 92. Bevor wir zur zweiten Hauptoperation (§ 84) an Vektoren übergehen, schicken wir folgende Betrachtungen über Winkel voran, damit wir die „Polarkoordinaten" eines Vektors erklären können.

Winkel.

Um klar zu machen, was wir unter „Winkel" verstehen wollen, denken wir uns auf dem Halbstrahl Ox einen Punkt P so genommen, daſs der Abstand von $\overline{OP}$ gleich der Einheitsstrecke E ist.

Es sind nun zwei Möglichkeiten vorhanden:

a) Der Strahl dreht sich in der Ebene um den festen Punkt O, während der Punkt P einen Bogen des „Einheitskreises" beschreibt. Findet die Drehung etwa im Sinne von rechts nach oben statt, so heiſst sie positiv; eine Drehung im entgegengesetzten Sinne heiſst dann negativ. In beiden Fällen

denken wir uns die Drehung als unbegrenzt — d. h. der Kreisbogen kann auch beliebig viele Umdrehungen betragen. Oder:

b) Der Strahl bleibt unbeweglich.

Die positive Drehung, die negative Drehung und das Stillstehen wollen wir jetzt unter dem Namen „Winkel" zusammenfassen[1]). Ein beliebiger Winkel mufs dann entweder „positiv", „negativ" oder „null" sein.

In der Anfangslage A des Punktes P ziehen wir an dem Einheitskreise eine auf Ox senkrecht stehende Tangente, die wir als eine reelle Achse mit Nullpunkt in A betrachten wollen. Wir denken uns nun die beiden Hälften dieser Geraden um den Kreis so aufgewickelt, dafs eine positive bezw. negative Bewegung auf der Geraden einer positiven resp. negativen Drehung um den Kreis entspricht.

Es wird also in dieser Weise zu jedem Winkel ein reeller Vektor eindeutig zugeordnet; den positiven (negativen) Winkeln entsprechen die positiven (negativen) reellen Vektoren, und dem Nullwinkel entspricht der Vektor Null.

Die ganze Theorie der reellen Vektoren können und wollen wir also ohne weiteres auf Winkel übertragen; insbesondere behalten wir (nach § 82) α, β, γ, . . . als Bezeichnungen für beliebige Winkel.

§ 93. Kongruente Winkel.

Zwei Winkel, α, β, die gleich sind oder sich nur um ganze Umdrehungen voneinander unterscheiden, nennt man „kongruent"; in Zeichen: $\alpha \equiv \beta$.

Bezeichnen wir mit 2π die Länge der Peripherie des Einheitskreises, so ist $\alpha \equiv \alpha \pm 2k\pi$, wo k eine beliebige natürliche Zahl ist.

Der Winkel $\pi/2$ ist ein rechter.

§ 94. Polarkoordinaten eines eigentlichen Vektors.

Einen Kreis, dessen Mittelpunkt O ist, nennen wir der Kürze wegen einen Centralkreis. Der Einheitskreis ist der Centralkreis, dessen Radius gleich der Einheitsstrecke E ist.

---

[1]) In diesem Sinne wird das Wort „Winkel" in der Trigonometrie etc. gebraucht; in der Planimetrie dagegen versteht man unter „Winkel" die geometrische Figur, die zwei von einem Punkte aus gezogene Halbstrahlen bilden.

Radius eines eigentlichen Vektors A heifst der absolute Vektor, den ein durch A gehender Centralkreis auf Ox bestimmt. Der Radius ist also gleich der absoluten Länge des Vektors und wird mit $|A|$ oder a bezeichnet.

Polarwinkel des Vektors heifst irgend ein Winkel α, der die Lage Ox in die Lage $\overline{OA}$ überführt. Jeder eigentliche Vektor hat dann unbegrenzt viele Polarwinkel, die einander kongruent sind.

Der kleinste Polarwinkel, der bei positivem Umlauf erhalten werden kann, heifst der „primitive Polarwinkel“ und wird mit ${}_0\alpha$ bezeichnet. $O \leqq {}_0\alpha < 2\pi$.

Einen beliebigen Polarwinkel bezeichnen wir durch ${}_0\alpha + 2t\pi$, wo das Symbol $t = O, \pm E, \pm 2E, \pm 3E, \ldots$ sein kann.

Jeder eigentliche Vektor wird durch den Radius und irgend einen Polarwinkel völlig bestimmt; ist der Vektor gegeben, so wird der Radius vollständig, der Polarwinkel dagegen nur bis auf eine additive Konstante $2t\pi$ bestimmt.

Radius und Polarwinkel zusammen heifsen Polarkoordinaten des Vektors. Von zwei gleichen Vektoren sind die Radien gleich und die Polarwinkel kongruent.

§ **95.** Die Schreibweise ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi)$ soll bedeuten, dafs a und α die Polarkoordinaten des Vektors A sind, und dafs ein bestimmter Polarwinkel ${}_0\alpha + 2t\pi$ ausgewählt ist.

Dem entsprechend schreiben wir für reelle Vektoren:

${}_ta = (a, 0 + 2t\pi)$; $-{}_ta = (a, \pi + 2t\pi)$; ${}_t\alpha = (a, 0 + t\pi)$ (§ 90).

Wenn wir einfach $A = (a, \alpha)$ schreiben, so bleibt der Polarwinkel vieldeutig. Allein im Falle der absoluten Vektoren, wo keine Drehung zulässig ist (§ 81), wollen wir bei dem Symbole a den bestimmten Polarwinkel Null verstehen: $a = {}_0a = (a, 0)$.

§ **96.** „Rein imaginäre“ Vektoren.

Jeden „imaginären“ Vektor, dessen Polarwinkel zu $\pi/2$ bezw. $-\pi/2$ kongruent ist, nennt man positiv resp. negativ „rein imaginär“ und die ganze Gerade, welche die Hauptachse in O senkrecht schneidet, die „imaginäre Achse“ oder besser die „Nebenachse“. Die positive Richtung auf der Nebenachse bildet mit der positiven Richtung der Hauptachse einen positiven rechten Winkel.

Der Vektor i.

Den speciellen positiven rein imaginären Vektor $(E, \pi/2)$ wollen wir der Kürze wegen mit i bezeichnen. Die positive imaginäre Achse wird also von dem Einheitskreise im Punkte i geschnitten.

---

§ 97. Multiplikation von Vektoren mit Vektoren.

Aus zwei beliebigen Vektoren A, B können wir durch folgende Regeln stets einen dritten Vektor ableiten, den wir das Produkt „B mal A" nennen und mit $B.A$ oder BA bezeichnen wollen:

a) Ist $A = (a, \alpha)$ und $B = (b, \beta)$, so soll $BA = (ab, \alpha + \beta)$ sein (§ 31, § 85).

b) $0 . A = 0$.

c) $B . 0 = 0$.

Nach dieser Definition (bei eigentlichem A und B) ist der Vektor BA nicht direkt aus der Lage der Punkte A und B abgeleitet, sondern seine Polarkoordinaten werden durch die Polarkoordinaten von A und B bestimmt. Es mufs also untersucht werden, ob der Vektor BA vielleicht von der Wahl der Polarwinkel von A und B abhängig ist. In unserem Falle sehen wir sofort ein, dafs es für das Resultat gleichgültig ist, welche Polarwinkel wir nehmen; denn $\alpha + 2t\pi + \beta + 2s\pi \equiv \alpha + \beta$.

Kurz gesagt: um das Produkt BA zu erhalten, nehmen wir das Produkt der Radien und die Summe der Polarwinkel.

§ 98. Aus § 2 und § 33 haben wir sofort:

1. $AB = BA$.
2. $A(BC) = (AB)C$.

Ferner ergiebt sich aus elementaren Lehrsätzen über ähnliche Dreiecke (§ 46):

3. $A(B \pm C) = AB \pm AC$. Und endlich:
4. $A(-B) = -(AB)$; $(-A)(-B) = AB$.

Das Produkt AB wird nur dann reell sein, wenn die beiden Punkte A, B selbst auf der reellen Achse liegen, oder wenn die Summe der Polarwinkel Null oder ein Vierfaches von π ist.

Die Multiplikation eines eigentlichen Vektors mit i bewirkt eine positive Rotation des Vektors um einen rechten Winkel.

§ 99. Division von Vektoren mit Vektoren.

Umgekehrt, wenn A und B gegeben sind, so untersuchen wir, ob ein Vektor X existiert, derart, dafs $BX = A$ ist. Wenn wir einen solchen finden, so wollen wir ihn den Quotienten „A durch B“ nennen und mit A/B u. s. w. bezeichnen. (Vergl. § 39.)

Wir finden:

a) Wenn $A = (a, \alpha) \neq 0$, $B = (b, \beta) \neq 0$ ist, so ist $A/B = (a/b, \alpha - \beta)$, unabhängig von der Wahl der Polarwinkel.

b) Ist $A = 0$, $B \neq 0$, so ist $0/B = 0$.

c) Ist $A = 0$, $B = 0$, so genügt jedes X der verlangten Bedingung, und $0/0$ bleibt unbestimmt.

d) Ist $A \neq 0$, $B = 0$, so kann man keinen Vektor finden, den wir mit $A/0$ bezeichnen könnten.

Die Division ist also stets durchführbar, wenn der Divisor nicht gleich Null ist; das Symbol A/B stellt aber keinen bestimmten Vektor dar, wenn $B = 0$ ist.

§ 100. Reciproke Vektoren.

Zwei Vektoren, deren Produkt gleich E ist, heifsen „reciprok“. Der reciproke von A ist offenbar $E/A = (E/a, -\alpha)$, wenn $A \neq 0$. Statt mit A zu dividieren, können wir mit E/A multiplizieren.

Wir finden:

1. $\dfrac{E}{AB} = \dfrac{E}{A} \cdot \dfrac{E}{B}$, 2. $\dfrac{E}{A/B} = \dfrac{B}{A}$, 3. $\dfrac{E}{E \pm A} = E \mp \dfrac{A}{E \pm A}$,

4. $\dfrac{E}{-A} = -\dfrac{E}{A}$.

Der Quotient A/B (wo $B \neq 0$) wird nur dann reell sein, wenn die beiden Punkte A, B entweder selbst auf der reellen Achse liegen oder auf irgend einer Geraden, die durch O geht.

Die Division eines eigentlichen Vektors durch i bewirkt eine negative Rotation des Vektors um einen rechten Winkel.

§ 101. Durch Wiederholung der Operation der Multiplikation gelangen wir (vergl. § 47) zu den Operationen der Potenzierung und Wurzelausziehung mit Zahlen, Brüchen oder absoluten Strecken als Exponenten, und zwar folgendermafsen:

§ 102. Potenzierung von Vektoren mit Zahlen als Exponenten.

Unter der „$p$ten Potenz von A" (geschrieben A^p) verstehen wir das Produkt $A . A . A . . . . A$, wo der Vektor A $p$mal als Faktor genommen ist.

Wir haben also nach § 97:

a) Wenn $A = (a, \alpha) \neq 0$ ist, so ist $A^p = (a^p, p\alpha)$ (§ 48).

b) $0^p = 0$.

Es ist für das Resultat gleichgültig, welcher Polarwinkel von A genommen wird.

§ 103. Es ergiebt sich sofort, dafs die in § 50 und § 51 angeführten Formeln auch hier gelten, da die Sätze, aus denen sie abgeleitet worden sind, auch für Vektoren gültig sind.

Insbesondere finden wir: $i^2 = -E$, $i^3 = -i$, $i^4 = E$, $i^5 = i$ etc. und $(-E)^p = -E$ oder $(-E)^p = E$, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

A^p wird nur dann reell sein, wenn A selbst reell ist, oder wenn der Polarwinkel von A ein Vielfaches π/p ist.

§ 104. Wurzeln aus Vektoren mit Zahlen als Wurzelexponenten.

Umgekehrt, wenn der Vektor A und die Zahl p gegeben sind, untersuchen wir, ob ein Vektor X existiert, derart, dafs $X^p = A$ ist; finden wir einen solchen, so nennen wir ihn die „$p$te Wurzel aus A" und bezeichnen ihn mit $\sqrt[p]{A}$.

Wir finden:

a) Ist ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$, so ist $\sqrt[p]{{}_tA} = \left(\sqrt[p]{a}, \frac{{}_0\alpha + 2t\pi}{p}\right)$, wobei $t = 0, \pm E, \pm 2E, \ldots$ sein kann (§ 53).

b) $\sqrt[p]{0} = 0$.

Hier ist es aber nicht mehr gleichgültig (wenn $A \neq 0$), welchen Polarwinkel von ${}_tA$ wir nehmen. Denn für die Werte $t = 0, E. 2E, \ldots (p-1)E$ bekommen wir jedesmal einen verschiedenen Wert von $\sqrt[p]{{}_tA}$. (Jedes weitere t giebt uns einen dieser p Punkte

wieder.) Wir finden also nicht nur einen, sondern p verschiedene Vektoren, deren $p$te Potenz gleich A ist.

Wir sagen daher, ein eigentlicher Vektor A hat p $p$te Wurzeln, die von der Wahl des Polarwinkels von A abhängig sind. Diese p Werte werden durch die Bezeichnung $\sqrt[p]{{}_tA}$ voneinander unterschieden. Sie liegen alle auf einem Centralkreise mit dem Radius $\sqrt[p]{a}$ und teilen den Kreisumfang in p gleiche Teile.

Ist t gegeben, so wird $\sqrt[p]{{}_tA}$ eindeutig bestimmt. Wenn wir einfach $\sqrt[p]{A}$ schreiben, so mufs dieses Symbol als ein $p$wertiges angesehen werden; allein im Falle der absoluten Vektoren wollen wir unter $\sqrt[p]{a}$ den bestimmten Wert $\sqrt[p]{a} = \sqrt[p]{{}_0a} = (\sqrt[p]{a}, 0)$ verstehen (§ 95).

§ **105.** Die Formeln in § 55 gelten auch für Vektoren, vorausgesetzt, dafs ein bestimmter Polarwinkel für jeden Vektor festgehalten wird. Z. B. $\sqrt[q]{{}_tA^p} = (\sqrt[q]{{}_tA})^p$.

Insbesondere finden wir:

$$\sqrt{-{}_0E} = i, \quad \sqrt{-{}_1E} = -i; \quad \sqrt{-A} = \pm i\sqrt{A}.$$

Kein Wert von $\sqrt[p]{A}$ kann reell sein, wenn A selbst nicht reell ist, etwa $A = \alpha$.

Ist α positiv, so giebt es entweder einen positiven, oder einen positiven und einen negativen reellen Wert von $\sqrt[p]{\alpha}$, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

Ist α negativ, so giebt es entweder einen negativen oder gar keinen reellen Wert von $\sqrt[p]{\alpha}$, je nachdem p ungerade oder gerade ist.

§ **106. Potenzen und Wurzeln von Vektoren mit Brüchen als Exponenten.**

a) Ist $A = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$, so soll sein:

$$ {}_tA^{p/q} = \left(a^{p/q}, \frac{p}{q}({}_0\alpha + 2t\pi)\right).$$

b) Dabei soll $0^{p/q} = 0$ sein.

Ist p/q ein reduzierter Bruch (§ 13), so hat $A^{p/q}$ (wenn $A \neq 0$) q verschiedene Werte, die wir bekommen, wenn wir $t = 0, E, 2E, \ldots (q-1)E$ setzen. Diese q Punkte liegen alle auf einem Centralkreise mit dem Radius $a^{p/q}$ und teilen den Kreisumfang in q gleiche Teile.

Die Formeln ${}_tA^{p/q} = \sqrt[q]{{}_tA^p} = (\sqrt[q]{{}_tA})^p$ etc. gelten, wenn ein bestimmter Polarwinkel von A festgehalten wird.

Z. B. sei ${}_tA = {}_4A = (27, 8\pi)$. Dann ist

$$({}_4A)^{2/6} = \left(3, \frac{8\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{({}_4A)^2},$$

jedoch nicht im allgemeinen $A^{2/6} = \sqrt[6]{A^2}$, denn $A^{2/6}$ ist drei- und $\sqrt[6]{A^2}$ sechswertig.

Umkehrung: $\sqrt[p/q]{{}_tA}$ ist dasselbe wie ${}_tA^{q/p}$.

§ 107. Potenzen und Wurzeln von Vektoren mit absoluten Strecken als Exponenten.

a) Ist ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$, so soll sein:

$${}_tA^b = (a^b, b[{}_0\alpha + 2t\pi]).$$

b) Dabei soll $0^b = 0$ sein.

Ist b eine mit E inkommensurable Strecke, so hat A^b (wenn $A \neq 0$) unbegrenzt viele Werte, denn für jeden Wert $t = 0, \pm E, \pm 2E, \ldots$ bekommen wir einen Polarwinkel, der zu keinem der anderen kongruent ist.

Diese Werte von A^b liegen alle auf einem Centralkreise mit dem Radius a^b; der erste hat den Polarwinkel $b \,.\, {}_0\alpha$; die Polarwinkel von beliebig vielen der übrigen kann man durch successive Addition und Subtraktion von $2b\pi$ erhalten.

Die Rechnungsregeln gelten wie vorhin.

Ist A positiv reell, so giebt es stets einen positiven reellen Wert von ${}_tA^b$.

Umkehrung: $\sqrt[b]{{}_tA}$ ist dasselbe wie ${}_tA^{E/b}$.

---

§ 108. Erste Normalform eines Vektors: $\alpha_1 + \alpha_2 i$. Rechtwinkelige Koordinaten.

Nach § 98 sehen wir, dafs, wenn α_2 reell ist, das Produkt

$\alpha_2 i$ rein imaginär wird. Aus der Definition der Addition von Vektoren erhalten wir dann folgendes:

Durch je zwei reelle Vektoren α_1, α_2 wird ein Vektor $A = \alpha_1 + \alpha_2 i$, und umgekehrt, durch jeden Vektor A wird ein Wertpaar α_1, α_2 völlig bestimmt.

α_1 und α_2 heifsen „Abscisse“ und „Ordinate“, oder reeller und imaginärer Bestandteil, zusammen die rechtwinkeligen Koordinaten des Vektors $\alpha_1 + \alpha_2 i$.

Für reelle Vektoren ist die Ordinate, für rein imaginäre Vektoren die Abscisse gleich Null [1]). Es ist nur dann $\alpha_1 + \alpha_2 i = 0$, wenn $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ ist.

Zwei Vektoren sind dann und nur dann einander gleich, wenn die beiden Abscissen sowie die beiden Ordinaten einander gleich sind.

§ **109.** Die Formeln für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Vektoren miteinander nehmen jetzt folgende Formen an:

1. $(\alpha_1 + \alpha_2 i) \pm (\beta_1 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \pm \beta_1) + (\alpha_2 \pm \beta_2) i.$
2. $(\alpha_1 + \alpha_2 i) \,.\, (\beta_1 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i.$
3. $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 i}{\beta_1 + \beta_2 i} = \dfrac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} + \dfrac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2} i$

(wo β_1 und β_2 nicht beide Null sind).

§ **110.** Zwei imaginäre Vektoren von der Form $\alpha_1 + \alpha_2 i$, $\alpha_1 - \alpha_2 i$ heifsen konjugiert.

Die Summe und das Produkt von zwei konjugiert imaginären Vektoren sind offenbar reell.

Siebentes Kapitel.

Vektor-Potenzierung: Specieller Fall mit der Basis *e*. Trigonometrische Funktionen.

§ **111.** Wir gehen nun zur dritten Hauptoperation an Vektoren über: der Potenzierung von Vektoren mit Vektoren (§ 84).

Bevor wir aber den allgemeinsten Fall behandeln, wollen wir

[1]) Für absolute Vektoren mufs die Ordinate Null und die Abscisse positiv sein.

zuerst den speciellen Fall erledigen, in welchem die Basis ein absoluter Vektor e ist, wo e nicht gleich E ist.

Bei der Differentiation der Exponentialfunktion stellt sich nun freilich heraus, daſs ein bestimmter Wert für e am zweckmäſsigsten ist, nämlich:

$$e = lim\left(E + \frac{E}{n}\right)^n = lim\left(E + \frac{E}{1!} + \frac{E}{2!} + \frac{E}{3!} + \cdots + \frac{E}{n!}\right)$$
$$= 2{,}718281 +;$$

jedoch für die Operationen in diesem und dem nächsten Kapitel könnten wir ebenso gut irgend einen anderen Wert für e nehmen, wenn nur $e \neq E$ ist.

Von diesem speciellen Falle ausgehend, werden wir dann zum allgemeinen Falle in einer ganz natürlichen Weise geführt, siehe § 128.

§ 112. Potenzierung von e als Basis mit Vektoren als Exponenten.

Aus einem beliebigen Vektor $A = \alpha_1 + \alpha_2 i$ und dem absoluten Vektor e ($e \neq E$) können wir durch folgende Regeln die Polarkoordinaten eines neuen Vektors bestimmen, den wir die **„Ate Potenz von e"** oder die **„natürliche Exponentialfunktion von A"** nennen und mit e^A oder $exp\ A$ bezeichnen:

$$e^A = e^{\alpha_1 + \alpha_2 i} = (e^{\alpha_1}, \alpha_2),$$

worin wir unter e^α folgendes verstehen:

a) wenn $|\alpha| = a$ ist, so ist $e^\alpha = e^a$ oder $e^\alpha = E/e^a$, je nachdem α positiv oder negativ ist (§ 63);

b) wenn $\alpha = 0$ ist, so ist $e^0 = E$.

Wir haben: $e^0 = E$ und $e^E = e$.

Ist A reell, etwa $A = \alpha$, so ist e^α reell und positiv.

Wenn A eine Parallele zur Hauptachse (bezw. zur Nebenachse) durchläuft, so bewegt sich e^A auf einem Centralkreise (bezw. auf einer Geraden durch O).

Für keinen Wert von A wird $e^A = 0$ sein.

§ 113. Aus § 66 folgt in allen Fällen:

1. $e^A e^B = e^{A+B}$, 2. $(e^A)^n = e^{nA}$, 3. $e^{-A} = E/e^A$.

Insbesondere haben wir:

$$e^{\pi i} = -E, \quad e^{-\pi i} = -E, \quad e^{\frac{\pi}{2} i} = i, \quad e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i.$$

$e^i = (E, E)$ ist derjenige Punkt des Einheitskreises, dessen Polarwinkel E ist.

Die Multiplikation eines eigentlichen Vektors mit e^i bewirkt also eine positive Rotation des Vektors um den Einheitswinkel.

$e^A = e^{\alpha_1 + \alpha_2 i}$ wird nur dann reell sein, wenn A reell ist, oder wenn α_2 ein Vielfaches von π ist.

§ 114. Periodicität der natürlichen Exponentialfunktion.

Es ist offenbar

$$e^{\alpha_1 + \alpha_2 i \pm k \cdot 2\pi i} = (e^{\alpha_1}, \alpha_2 \pm 2k\pi) = e^{\alpha_1 + \alpha_2 i};$$

d. h. e^A bleibt unverändert, wenn A um ein Vielfaches von $2\pi i$ vermehrt oder vermindert wird. e^A heifst daher eine „periodische Funktion“ von A, mit der „Periode“ $2\pi i$.

---

§ 115. Logarithmen von Vektoren zur Basis e.

Umgekehrt, wenn wir bei gegebenem A einen Vektor X so bestimmen können, dafs $e^X = A$ ist, so wollen wir X den „natürlichen Logarithmus von A“ oder schlechthin den „Logarithmus von A“ nennen und mit $log A$ bezeichnen.

D. h. ist ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$, so versuchen wir $X = \xi_1 + \xi_2 i$ so zu bestimmen, dafs $e^{\xi_1} = a$ und $\xi_2 \equiv {}_0\alpha$ wird.

Wir finden:

Wenn $A \neq 0$ ist, so ist

$$log\, {}_tA = log\, a + ({}_0\alpha + 2t\pi) i,$$

worin wir unter $log\, a$ folgendes verstehen:

a) ist $a \neq E$, so ist $log\, a = {}^e lg\, a$ oder $log\, a = -\, {}^e lg\, E/a$, je nachdem $a > E$, $e > E$ (bezw. $a < E$, $e < E$) oder $a < E$, $e > E$ (bezw. $A > E$, $e < E$) ist (§ 73);

b) ist $a = E$, so ist $log\, E = 0$.

Wenn $A = 0$ ist, so können wir keinen Vektor finden, den wir mit $log\, 0$ bezeichnen könnten.

Wir sagen daher, der Logarithmus eines eigentlichen Vektors A hat unbegrenzt viele Werte, die von der Wahl des Polarwinkels von A abhängig sind. Ist t gegeben, so ist $log\, {}_tA$ eindeutig bestimmt. Wenn wir einfach $log\, A$ schreiben, so hat dieses Symbol unbegrenzt viele Werte; allein im Falle der absoluten Vektoren wollen wir unter $log\, a$ den bestimmten Vektor $log\, a$

$= log_0 a$ verstehen. Der Logarithmus eines absoluten Vektors ist also reell.

Die Werte des Logarithmus liegen alle auf einer Geraden, die senkrecht auf der reellen Achse steht; die Differenz je zweier aufeinander folgenden Werte ist $2\pi i$.

Für $A = 0$ ist die Operation nicht durchführbar; das Symbol $log\, 0$ wird also nicht definiert.

Bewegt sich A auf einem Centralkreise (bezw. auf einer Geraden durch O), so bewegt sich $log_t A$ auf einer Parallelen zur Nebenachse (bezw. zur Hauptachse); dabei sind, wenn A auf dem Einheitskreise liegt, alle Werte von $log\, A$ rein imaginär.

§ 116. Aus § 113 finden wir:

1. $log_0 E = 0$; $log_t E = 2t\pi i$.
2. $log_0 e = E$; $log_t e = E + 2t\pi i$.
3. $log\,({}_tA\,{}_sB) = log_t A + log_s B$, wobei für jeden Vektor ein bestimmter Polarwinkel festgehalten werden mufs.
4. $log\,({}_tA^b) = b\; log_A A$.

Insbesondere ist

$$log\,(-{}_0E) = \pi i, \quad log\, i = \frac{\pi}{2} i, \quad log\,(-i) = \frac{3\pi}{2} i.$$

$log\, A$ hat dann und nur dann einen reellen Wert, wenn A ein positiver reeller Vektor ist.

---

§ 117. Zweite Normalform eines eigentlichen Vektors: $ae^{\alpha i}$.

Wenn A rein imaginär ist, etwa $A = \alpha i$, so fällt $e^{\alpha i}$ auf den Einheitskreis; $e^{\alpha i} = (E, \alpha)$ (§ 112). Folglich: $a e^{\alpha i} = (a, \alpha)$.

Sind also a und α Radius und Polarwinkel eines eigentlichen Vektors A, so können wir A in der Form schreiben:

$$A = (a, \alpha) = a e^{\alpha i}$$

oder besser

$${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) = a e^{({}_0\alpha + 2t\pi) i}.$$

---

§ 118. An dieser Stelle wollen wir die wichtigsten „trigonometrischen Funktionen“ eines Vektors erklären, sowie die inversen Operationen. Dadurch werden wir die Beziehung zwischen Polarkoordinaten und rechtwinkeligen Koordinaten zum Ausdruck bringen können.



§ 119. Trigonometrische Funktionen eines Vektors.

Aus einem beliebigen Vektor A können wir durch folgende Regeln zwei neue Vektoren bilden, die wir „Sinus von A“ und „Cosinus von A“ nennen und mit $\sin A$ resp. $\cos A$ bezeichnen wollen:

$$\sin A = \frac{e^{Ai} - e^{-Ai}}{2i} \qquad \cos A = \frac{e^{Ai} + e^{-Ai}}{2}.$$

Dazu definieren wir die Tangente von A durch $\operatorname{tang} A = \frac{\sin A}{\cos A}$, wenn $\cos A \neq 0$.

§ 120. Aus § 112 und § 113 finden wir:

1. $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = E$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -E$,
   $\cos 0 = E$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -E$, $\cos 3\pi/2 = 0$.
2. $\sin(-A) = -\sin A$, $\cos(-A) = \cos A$.
3. $\sin(A \pm 2k\pi) = \sin A$, $\cos(A \pm 2k\pi) = \cos A$; d. h. $\sin A$ und $\cos A$ sind periodische Funktionen mit der Periode 2π.
4. $\sin A$ wird nur dann gleich Null sein, wenn $2Ai = \log E$, d. h. wenn $A = t\pi$ ist; $\cos A$ nur dann, wenn $2Ai = \log(-E)$, d. h. wenn $A = (2t+1)\pi/2$ ist:

$$\sin(t\pi) = 0, \qquad \cos\left[(2t+1)\frac{\pi}{2}\right] = 0.$$

5. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = E$.
6. $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.
   $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$.

   Insbesondere: $\cos A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$.
7. $\cos A + i \sin A = e^{Ai}$.

§ 121. Konstruktion des Sinus und Cosinus eines reellen Vektors.

Ist A reell, etwa $A = \alpha$, so ist $e^{\alpha i} = (E, \alpha)$ und $e^{-\alpha i} = (E, -\alpha)$, und wir haben folgende Konstruktion für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ vorzunehmen:

Wir tragen α als Bogen auf dem Einheitskreise ab, so dafs wir den Punkt $P = (E, \alpha)$ erhalten. Ist dann M bezw. N der Fufspunkt des Lotes von P auf die Hauptachse bezw. auf die Nebenachse, so ist $\overline{OM} = \cos \alpha$ und $\overline{ON} = i \sin \alpha$.

Daraus geht hervor, dafs $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ reell sind, und zwar nie kleiner als $-E$ und nie gröfser als E.

---

§ 122. Dritte Normalform eines eigentlichen Vektors.

Aus § 120 (7) haben wir $a(\cos\alpha + i\sin\alpha) = a e^{\alpha i}$. Also nach § 117, wenn a und α die Polarkoordinaten eines eigentlichen Vektors A sind, können wir A in der Form schreiben:

$$A = \underset{\cdot}{a}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oder besser

$$_tA = a[\cos({}_0\alpha + 2t\pi) + i\sin({}_0\alpha + 2t\pi)].$$

§ 123. Wir können nun aus den Polarkoordinaten eines eigentlichen Vektors die rechtwinkeligen bestimmen; es ist nämlich:

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 i = (a\cos\alpha) + (a\sin\alpha)i,$$

also

$$\alpha_1 = a\cos\alpha, \qquad \alpha_2 = a\sin\alpha.$$

Dabei ist nach § 120 (5)

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = a^2 \quad \text{und} \quad \alpha_2/\alpha_1 = \operatorname{tang}\alpha.$$

---

§ 124. Arcus-Tangens eines Vektors.

Umgekehrt, ist ein Vektor A gegeben, so untersuchen wir, ob ein Vektor X sich so bestimmen läfst, dafs $\operatorname{tang} X = A$ ist. Wenn wir einen solchen finden können, so wollen wir ihn den Arcus-Tangens von A nennen und mit $\operatorname{tang}^{-1} A$ oder $\operatorname{arc\,tang} A$ bezeichnen.

D. h. wir suchen X so zu bestimmen, dafs $\dfrac{e^{Xi} - e^{-Xi}}{i(e^{Xi} + e^{-Xi})} = A$ oder $e^{2Xi} = \dfrac{E + Ai}{E - Ai}$ sein wird.

Wenn $A \neq \pm i$ ist, so genügt $X = \dfrac{E}{2i}\log\dfrac{E + Ai}{E - Ai}$ dieser Bedingung. Wegen der Vieldeutigkeit des Logarithmus bekommen wir für X unbegrenzt viele Werte, die sich um Vielfache von π unterscheiden.

Jeder Vektor A, wo $A \neq \pm i$ ist, hat also nicht nur einen Arcus-Tangens, sondern unbegrenzt viele. Diese wollen wir durch die Bezeichnung $_t\operatorname{tang}^{-1} A$ von einander unterscheiden, indem wir schreiben:

$$_t\operatorname{tang}^{-1} A = \frac{E}{2i}\log\frac{E + Ai}{E - Ai} + t\pi \quad (A \neq \pm i),$$

wobei für den Logarithmus der einfachste Wert — d. h. der Wert, dessen imaginärer Bestandteil Null ist oder zwischen Null und 2π liegt — zu verstehen ist (§ 115).

Die Werte von ${}_t tang^{-1} A$ liegen alle auf einer Parallelen zur Hauptachse, mit regelmäßigen Zwischenräumen. Ist t gegeben, so ist ${}_t tang^{-1} A$ eindeutig bestimmt; schreiben wir einfach $tang^{-1} A$, so ist das vieldeutig.

§ 125. Konstruktion des Arcus-Tangens eines reellen Vektors.

Ist A reell, etwa $A = \alpha$, so ist folgende Konstruktion für $tang^{-1}\alpha$ vorzunehmen. Auf der Tangente des Einheitskreises im Punkte E konstruieren wir den Punkt $T = E + \alpha i$. Schneidet dann $\overline{OT}$ den Kreis in den Punkten P_1 und P_2, so ist $tang^{-1}\alpha$ ein reeller Vektor, dessen Abscisse gleich dem Bogen $\overline{EP_1}$ oder $\overline{EP_2}$ etc. ist.

$tang^{-1}\alpha$ ist also stets reell.

§ 126. Wir können nun aus den rechtwinkeligen Koordinaten eines eigentlichen Vektors die Polarkoordinaten ableiten.

In der That, ist $A = \alpha_1 + \alpha_2 i = (a, \alpha)$, so ist nach § 123:

$$a = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2},$$

wobei der absolute Wert der Wurzel zu verstehen ist;

$$\alpha = tang^{-1}(\alpha_2/\alpha_1),$$

wobei man zwischen α und $\alpha + \pi$ durch Angabe des Quadranten, in dem der Vektor liegt, zu wählen hat.

---

§ 127. Arcus-Sinus und Arcus-Cosinus eines Vektors.

Wir finden in ähnlicher Weise:

$$sin^{-1} A = \frac{1}{i} log\left(A i \pm \sqrt{E - A^2}\right);$$

$$cos^{-1} A = \frac{1}{i} log\left(A i \mp \sqrt{E - A^2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

$sin^{-1} A$ und $cos^{-1} A$ haben also im allgemeinen zwei Scharen von Werten, je nachdem wir das obige oder das untere Vorzeichen nehmen; in Folge der Vieldeutigkeit des Logarithmus hat jede Schar unbegrenzt viele Werte, die sich um Vielfache von 2π voneinander unterscheiden.

Um eine eindeutige Beziehung zu schaffen, schreiben wir wie folgt:

$$\overline{{}_t\sin^{-1} A} = \frac{1}{i} \log \left(A i + \sqrt{E - A^2}\right) + 2 t \pi$$

$$\underline{{}_t\sin^{-1} A} = \frac{1}{i} \log \left(A i - \sqrt{E - A^2}\right) - 2 t \pi$$

$$\overline{{}_t\cos^{-1} A} = \frac{1}{i} \log \left(A i - \sqrt{E - A^2}\right) - \pi/2 - 2 t \pi$$

$$\underline{{}_t\cos^{-1} A} = \frac{1}{i} \log \left(A i + \sqrt{E - A^2}\right) - \pi/2 + 2 t \pi.$$

Dann ist:

$$\overline{{}_t\sin^{-1} A} + \overline{{}_t\cos^{-1} A} = \pi/2 = \underline{{}_t\sin^{-1} A} + \underline{{}_t\cos^{-1} A}$$

$$\overline{{}_t\sin^{-1} A} + \underline{{}_t\sin^{-1} A} = \pi \qquad \overline{{}_t\cos^{-1} A} + \underline{{}_t\cos^{-1} A} = 0.$$

Achtes Kapitel.

Vektor-Potenzierung: Allgemeiner Fall.

§ 128. Wir werden nun zur Definition der Potenzierung für den allgemeinen Fall in folgender Weise geführt (§ 111).

Wenn A und B gegeben sind, so untersuchen wir, ob ein Vektor X existiert, derart, dafs $\log X = B \log A$ wird. Können wir einen solchen finden, so nennen wir ihn die Bte Potenz von A und bezeichnen ihn mit A^B. Dabei sind wir sicher, dafs die so definierte neue Operation wenigstens einer der Hauptregeln für die Potenzierung von Strecken gehorcht.

Ist ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2 t \pi) \neq 0$, $B = \beta_1 + \beta_2 i$, $X = (x, \xi)$, so ist $B \log {}_tA = \beta_1 \log a - \beta_2 ({}_0\alpha + 2 t \pi) + [\beta_2 \log a + \beta_1 ({}_0\alpha + 2 t \pi)] i$; $\log X = \log x + \xi i$.

Wir versuchen also $X = (x, \xi)$ so zu bestimmen, dafs

$$\log x = \beta_1 \log a - \beta_2 ({}_0\alpha + 2 t \pi)$$

und

$$\xi = \beta_2 \log a + \beta_1 ({}_0\alpha + 2 t \pi)$$

sein wird.

Dies können wir stets machen, vorausgesetzt, dafs $A \neq 0$ ist; und wir gelangen zur Definition wie folgt.



§ 129. Potenzierung von Vektoren mit Vektoren als Exponenten.

Aus zwei gegebenen Vektoren, $_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$ und $B = \beta_1 + \beta_2 i$, können wir durch folgende Regel die Polarkoordinaten eines neuen Vektors bestimmen, den wir die Bte Potenz von A nennen und mit $_tA^B$ bezeichnen wollen:

$$_tA^B = {}_tA^{\beta_1 + \beta_2 i} = (e^{\beta_1 \log a - \beta_2({}_0\alpha + 2t\pi)}, \beta_2 \log a + \beta_1 [{}_0\alpha + 2t\pi])$$

(wo $A \neq 0$) (§ 112, § 115).

Dem Symbole 0^B haben wir hiermit keine Bedeutung beigelegt; wenn aber b ein absoluter Vektor ist, so ist $0^b = 0$ (§ 107).

Wir haben: $_tA^E = {}_tA$, $_tA^0 = {}_0E$, $_0E^B = {}_0E$.

Ist $B \neq 0$, so hat $_tA^B$ offenbar im allgemeinen unbegrenzt viele Werte, die von der Wahl des Polarwinkels der Basis A abhängig sind.

Die zu $_tA^B$ gehörigen Polarwinkel bilden eine „arithmetische Progression" mit der konstanten Differenz $2\beta_1\pi$; die Radien bilden eine „geometrische Progression" mit dem konstanten Quotienten $e^{-2\beta_2\pi}$. Die Punkte $_tA^B$ liegen also alle auf einer „logarithmischen Spirale" um den Punkt O. Darunter sind zwei specielle Fälle zu bemerken:

wenn B reell ist, etwa $B = \beta$, liegen alle Werte von $_tA^\beta$ auf einem Kreise um O;

wenn B rein imaginär ist, etwa $B = \beta i$, liegen alle Werte von $_tA^{\beta i}$ auf einem von O aus gezogenen Halbstrahl.

§ 130. Aus § 113 folgt:

1. $({}_tA^B)^C = {}_tA^{BC}$, 2. $_tA^{B+C} = {}_tA^B {}_tA^C$, 3. $({}_tA {}_sB)^C = {}_tA^C {}_sB^C$,

4. $_tA^{-B} = E/{}_tA^B$,

vorausgesetzt, daſs ein bestimmter Polarwinkel für jede Basis festgehalten wird.

Ferner: $(\cos A + i \sin A)^B = \cos BA + i \sin BA$ [§ 120 (7)].

Insbesondere, wenn $A = i$, $B = i$ ist, so haben wir die berühmte Formel:

$$i^i = \frac{E}{e^{\pi/2}} \quad \text{oder} \quad ({}_ti)^i = \frac{E}{e^{\pi/2 - 2t\pi}}.$$

§ 131. Ist ${}_tA = {}_te = (e, 2t\pi)$, so ist

$${}_te^{\beta_1 + \beta_2 i} = (e^{\beta_1 - \beta_2 . 2t\pi}, \beta_2 + \beta_1 . 2t\pi),$$

und wenn wir dann den primitiven Polarwinkel ($t = 0$) herausgreifen, so ist $e^{\beta_1 + \beta_2 i} = (e^{\beta_1}, \beta_2)$, was mit der Definition in § 112 übereinstimmt.

Ist B reell, etwa $B = \beta$, so ist $e^{\beta \log a} = e^{\log a^\beta} = a^\beta$; folglich ${}_tA^\beta = (a^\beta, \beta[{}_0\alpha + 2t\pi])$, was mit § 107 übereinstimmt.

---

§ 132. Erste Umkehrung.

Wurzelausziehung aus Vektoren mit Vektoren als Wurzelexponenten.

Wenn A und B gegeben sind, so suchen wir einen Vektor X, derart, dafs $X^B = A$ ist; können wir einen solchen finden, so nennen wir ihn die Bte Wurzel aus A und bezeichnen ihn mit $\sqrt[B]{A}$.

Wenn ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$ und $B = \beta_1 + \beta_2 i \neq 0$ ist, so finden wir: $\sqrt[B]{{}_tA} = {}_tA^{E/B}$, was nichts neues bietet.

Den Symbolen $\sqrt[0]{A}$ und $\sqrt[B]{0}$ haben wir hiermit keine Bedeutung beigelegt; wenn aber b ein absoluter Vektor ist, so ist $\sqrt[b]{0} = 0$ (§ 107).

§ 133. Zweite Umkehrung.

Wenn A und B gegeben sind, so untersuchen wir, ob ein Vektor X existiert, derart, dafs $B^X = A$ ist; finden wir einen solchen, so wollen wir ihn den Logarithmus von A zur Basis B nennen und mit ${}^B\!\log A$ bezeichnen.

Sei ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi) \neq 0$, ${}_sB = (b, {}_0\beta + 2s\pi) \neq 0$, $X = \xi_1 + \xi_2 i$; dann ist

$${}_sB^{\xi_1 + \xi_2 i} = (e^{\xi_1 \log b - \xi_2({}_0\beta + 2s\pi)}, \xi_2 \log b + \xi_1[{}_0\beta + 2s\pi]).$$

Wir sollen nun ξ_1 und ξ_2 so bestimmen, dafs ${}_sB^{\xi_1 + \xi_2 i} = {}_tA$ wird; d. h. so, dafs

$$\xi_1 \log b - \xi_2({}_0\beta + 2s\pi) = \log a$$

und

$$\xi_1({}_0\beta + 2s\pi) + \xi_2 \log b = {}_0\alpha + 2t\pi$$

wird.

Diese Gleichungen können wir stets für ξ_1 und ξ_2 auflösen, vorausgesetzt, daſs $B \neq E$ ist; so gelangen wir zur folgenden Definition:

§ 134. Logarithmen von Vektoren mit Vektoren als Basis.

Ist ${}_tA = (a, {}_0\alpha + 2t\pi)$, ${}_sB = (b, {}_0\beta + 2s\pi)$ und $A \neq 0$, $B \neq 0$, $B \neq E$, so ist

$$^{{}_sB}\log {}_tA = \frac{(\log a)(\log b) + ({}_0\alpha + 2t\pi)({}_0\beta + 2s\pi)}{(\log b)^2 + ({}_0\beta + 2s\pi)^2}$$
$$+ \frac{({}_0\alpha + 2t\pi)(\log b) - ({}_0\beta + 2s\pi)(\log a)}{(\log b)^2 + ({}_0\beta + 2s\pi)^2}\, i$$

oder nach § 109 (3):

$$^{{}_sB}\log {}_tA = \frac{\log a + ({}_0\alpha + 2t\pi)i}{\log b + ({}_0\beta + 2s\pi)i}.$$

Wir haben: $^{{}_sB}\log {}_sB = E$, $^{{}_sB}\log {}_0E = 0$.

Den Symbolen $^0\log A$, $^E\log A$, $^B\log 0$ haben wir keine Bedeutung beigelegt.

Wir sehen, daſs $^{{}_sB}\log {}_tA$ im allgemeinen infolge der doppelten Abhängigkeit von A und B in doppelter Weise unbegrenzt viele Werte hat, die von der Wahl der Polarwinkel von A und B abhängig sind.

§ 135.

Durch direkte Substitution können wir folgende Formeln verifizieren:

1. $^{{}_sB}\log({}_tA\,{}_{t'}A') = {}^{{}_sB}\log {}_tA + {}^{{}_sB}\log {}_{t'}A'$,
2. $^{{}_sB}\log({}_tA^C) = C({}^{{}_sB}\log {}_tA)$,
3. $^{{}_rC}\log {}_tA = \dfrac{^{{}_sB}\log {}_tA}{^{{}_sB}\log {}_rC}$,

wenn ein bestimmter Polarwinkel für jeden Vektor festgehalten wird.

§ 136.

Ist ${}_sB = {}_se = (e, 2s\pi)$, so ist

$$^{{}_se}\log {}_tA = \frac{\log a + ({}_0\alpha + 2t\pi)i}{E + 2s\pi i},$$

und wenn wir dann den primitiven Polarwinkel $(s = 0)$ der Basis herausgreifen, so haben wir:

$$^e\log {}_tA = \log a + ({}_0\alpha + 2t\pi)i,$$

was mit § 115 übereinstimmt.

§ 137. Liste der Ausnahmefälle.

Die in diesem Aufsatze erklärten Operationen an Vektoren sind, wie wir gesehen haben, immer durchführbar (§ 1), wenn wir einzelne Werte der gegebenen Vektoren ausschliefsen.

Wir wollen nun eine Übersicht dieser Ausnahmefälle geben, in welchen die Operationen nicht durchführbar sind.

A/B,	wenn	$B = 0$	(§ 99).
$\log A$,	„	$A = 0$	(§ 115).
$\operatorname{tang} A$,	„	$A = (2t + 1)\pi/2$	(§ 119).
$\operatorname{tang}^{-1} A$,	„	$A = i$ oder $A = -i$	(§ 124).
A^B	„	$A = 0$[1]	(§ 129).
$\sqrt[B]{A}$,	„	$A = 0$[1] oder $B = 0$	(§ 132).
${}^B\log A$,	„	$A = 0$, $B = 0$ oder $B = E$	(§ 134).

Den Symbolen $A/0$, $\log 0$ etc. haben wir also keine Bedeutung beigelegt.

---

[1]) Jedoch wenn b ein absoluter Vektor ist, so ist $0^b = 0$ und $\sqrt[b]{0} = 0$ (§ 107).

Berichtigungen.

Seite 44, § 92, Zeile 8 von unten, statt der Abstand von $\overline{OP}$ lies: die Länge $\overline{OP}$.

Seite 47, Zeile 3 von unten, statt Vierfaches lies: Vielfaches.

Seite 53, Zeile 7 von oben, statt 2,718281 + lies: (2,718281 ...) E.

Seite 53, § 112, Zeile 4 von unten, Hauptachse und Nebenachse sind umzutauschen.

Seite 55, § 116, Formel 4, statt $_AA$ lies: $_tA$.

Seite 59, Zeile 1 von oben, statt Beziehung lies: Bezeichnung.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06797 2359
Digitized by Google

